

TRABAJO MATEMÁTICO DE FUTUROS PROFESORES EN EL DISEÑO DE TAREAS GEOMÉTRICAS CON APOYO DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL*¹

MATEMATICAL WORK OF TUTURE TEACHERS IN THE DESIGN OF GEOMETRIC TASKS WITH THE SUPPORT OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE

 <https://doi.org/10.32735/S2735-61752025000224026>

Ruth Ruiz-Vargas²

ruth.ruiz@alumnos.ucm.cl

<https://orcid.org/0009-0001-5002-1155>

Universidad Católica del Maule
Talca, Chile

Sofía Navarro-Muñoz³

sofia.navarro@alumnos.ucm.cl

<https://orcid.org/0009-0003-3341-3311>

Universidad Católica del Maule
Talca, Chile

Álex Fabián Ramírez-Morales⁴

alex.ramirez@alumnos.ucm.cl

<https://orcid.org/0009-0007-3270-9419>

Universidad Católica del Maule
Talca, Chile

Carolina Henríquez-Rivas⁵

chenriquezr@ucm.cl

<https://orcid.org/0000-0002-4869-828X>

Universidad Católica del Maule
Talca, Chile

RESUMEN

La Inteligencia Artificial (IA), ha emergido como un recurso que facilita el aprendizaje personalizado y la generación de materiales para la enseñanza. En esta investigación, se propone como objetivo caracterizar el trabajo matemático de futuros profesores en contextos formativos de diseño de tareas geométricas con apoyo de ChatGPT, específicamente centradas en la homotecia. En términos metodológicos, se presenta un estudio de caso, sustentado en la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) de futuros profesores (FP) al abordar la resolución y, posterior, adaptación de tareas. El proceso se organizó en tres etapas: primero, la selección de tareas; luego, adaptación inicial de tareas por investigadores; finalmente, en duplas, los FP resolvieron las tareas (sin IA) y, luego, sugirieron mejoras para el rediseño de las tareas (con apoyo de IA). El análisis se basó en la interpretación de la circulación entre las génesis del ETM (semiótica, instrumental y discursiva) del trabajo de los FP en esta dinámica,

* Artículo recibido el 5 de noviembre de 2025; aceptado el 13 de diciembre de 2025.

¹ El presente artículo forma parte de una investigación de grado, asociada al Proyecto FONDECYT Iniciación N° 11230523 (ANID).

² Pedagogía en Matemática y Computación, Facultad de Ciencias Básicas, Departamento de Matemática, Física y Estadística, Universidad Católica del Maule.

³ Pedagogía en Matemática y Computación, Facultad de Ciencias Básicas, Departamento de Matemática, Física y Estadística, Universidad Católica del Maule.

⁴ Pedagogía en Matemática y Computación, Facultad de Ciencias Básicas, Departamento de Matemática, Física y Estadística, Universidad Católica del Maule.

⁵ Profesora de Estado en Matemática y Computación (USACH); Magíster en enseñanza de las ciencias con mención en didáctica de la matemática (PUCV); Doctora en didáctica de la matemática (PUCV); Postdoctorado en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.



centrado en la etapa tres. Los resultados ofrecen una propuesta para el diseño y análisis de tareas que son adaptadas con uso de IA y, un análisis sobre la integración instrumental de ChatGPT para la formación docente.

Palabras claves: Tecnología; homotecía; trabajo matemático; artefactos.

ABSTRACT

Artificial Intelligence (AI) has emerged as a resource that facilitates personalized learning and the generation of teaching materials. This research aims to characterize the mathematical work of pre-service teachers in training contexts involving the design of geometric tasks supported by ChatGPT, specifically focused on homothety. Methodologically, a case study is presented, grounded in the theory of Mathematical Workspaces (MWS), as applied to the resolution and subsequent adaptation of tasks by pre-service teachers. The process was organized into three stages: first, task selection; second, initial task adaptation by researchers; and finally, in pairs, the pre-service teachers solved the tasks (without AI) and then suggested improvements for redesigning them (with AI support). The analysis was based on interpreting the flow between the different stages of MWS (semiotic, instrumental, and discursive) in the pre-service teachers' work within this dynamic, focusing on stage three. The results offer a proposal for the design and analysis of tasks that are adapted using AI, and an analysis of the instrumental integration of ChatGPT for teacher training.

Keywords: Technology; homothety; mathematical work; artifacts.

Introducción

La Inteligencia Artificial (IA) en educación ha sido una innovación en los últimos años, por lo cual se han realizado investigaciones de diversa índole (Panqueban y Huincahue, 2024; Daher y Adnan, 2025). Tal como menciona Rodríguez et al. (2017), se vive con la tecnología, y tanto docentes como estudiantes se adaptan al uso de TIC's para fomentar un continuo aprendizaje y cambios en las metodologías de enseñanza, a través de la integración de herramientas digitales que promueven la colaboración y la interacción en el aula, fomentando el pensamiento crítico de la sociedad moderna. La investigación sobre la IA en educación se encuentra en un proceso inicial de exploración en sus aportes dentro y fuera del aula (Panqueban y Huincahue, 2024). El presente estudio se enfoca en el análisis del trabajo matemático de futuros docentes, específicamente en el dominio de geometría cuando adaptan tareas y reflexionan con el apoyo de IA.

Las nuevas tecnologías permiten personalizar el aprendizaje, adaptándose a las necesidades individuales de cada estudiante (Gaona et al., 2022a). En concreto, existen plataformas basadas en Inteligencia Artificial como ChatGPT, Claude, BlackBox, Gemini que ofrecen recursos y ejercicios específicos que se alinean con el nivel de comprensión del estudiante. En este sentido, Saez-Pérez y Pizà (2024) mencionan que además de dar servicios de apoyos inmediatos, logran dar asesoramientos según el contexto que se le entregue a la IA, la información que otorga puede ser de diferentes enfoques (Daher y Adnan, 2025). Al respecto, se presenta un potencial considerable en ChatGPT como herramienta para la resolución de problemas y derivados de STEM (Spreitzer et al., 2024), si las instrucciones entregadas son específicas, la precisión y calidad de la respuesta entregada por la IA será considerablemente favorable (Wardat et al., 2023).

El uso de inteligencia artificial por los estudiantes puede proporcionar material de estudio personalizado, diferentes propuestas de aprendizaje y propiciar el aprendizaje interdisciplinar, rescatando que la utilización de la IA se adapta a sus necesidades y a diferentes grupos, mejorando la calidad del aprendizaje y afrontar los problemas de la realidad (Escotet, 2023).

También, se destaca la preparación previa de los estudiantes para competencias transversales de manera ética, colaborativa, responsable, honesta, creativa y con el uso de criterio para seleccionar información durante el aprendizaje en su utilización (Rebelo, 2024). Además, cuando los estudiantes interactúan con la IA de forma instrumental, pueden surgir nuevas ideas y nociones de conceptos para mejorar la comprensión de estos para la resolución de problemas, siendo una guía para el estudiantado (Tan y Yuan, 2024).

En particular, la IA en educación matemática ha empleado un papel crucial, dado que permite realizar una transformación dentro de la enseñanza. Según algunos investigadores, la IA no ha alcanzado su mayor potencial (Son, 2024). Göktepe-Yıldız y Göktepe-Körpeoğlu (2025) en un análisis bibliométrico, analizan que hay un auge de investigaciones sobre la IA en educación matemática, múltiples países han compartido estrategias y recursos de enseñanza en la IA en educación matemática. Mientras que, los Intelligent Tutoring Systems (ITS), referidos al uso de IA en educación matemática, pueden ofrecer la oportunidad de reformular la forma en que se evalúa, enseña y se aprende matemática (Son, 2024).

Por otro lado, ChatGPT está siendo reconocido por sus capacidades dentro de la matemática (Hosseini-Mohand et al., 2025), permitiendo un mayor éxito en la enseñanza y rendimiento de la educación en matemática, ya que ChatGPT produce soluciones paso a paso para el usuario, generando respuestas tanto de manera visual como en formato de texto, facilitando la comprensión de la problemática y con ello su solución (Zhuang y Zhang, 2025). Debido a la rapidez de la mencionada IA, es que permite generar explicaciones en cuestión de segundos, y con ello, explicaciones sencillas que facilitan la comprensión del usuario y la posterior retroalimentación. A pesar de esto, ChatGPT presenta algunos errores según la complejidad del contexto de modelado, es decir, puede resolver tareas, pero aumenta la posibilidad de error cuando el modelado requiere de ciertas competencias (Wardat et al., 2023). Según Spreitzer et al. (2024), una forma que los estudiantes utilicen estos medios como herramienta educativa, es que los profesores reciban la formación sobre el uso eficaz de la IA, ya que podrían mejorar sus métodos de enseñanza, de manera que aseguren que todos los estudiantes comprendan y con ello desarrollen habilidades sólidas en la resolución de problemas.

Si bien la investigación en el ámbito de la educación en geometría es extensa (e.g., Almubarak et al., 2025; Herbst et al., 2018), en la formación del profesorado en este dominio matemático existe menos investigación (Panqueban y Huincahue, 2024). Asimismo, para la investigación en educación matemática en el dominio de geometría con apoyo de IA, es relevante realizar avances investigativos sobre la implementación de la IA, ya que se encuentra masificada en la vida cotidiana, además de considerar que son pocos los estudios encontrados que contemplan a universitarios, en especial a futuros profesores (Panqueban, 2024). En este sentido, la IA presenta dificultades para producir resoluciones correctas, adicionalmente, se considera que su rendimiento es significativo al momento de introducir imágenes en vez de textos específicos para la resolución de la tarea (Svičević et al., 2025). En este mismo dominio, se reporta que ChatGPT se encuentra con algunos conceptos erróneos al momento de resolver problemas geométricos, ya que esta IA no es capaz de razonar y comprender de la misma manera el contexto del problema geométrico, si bien, brinda orientaciones para la geometría, se debe validar la veracidad de la información por los investigadores (Wardat et al. 2023).

A partir de lo expuesto anteriormente, relacionado con la aplicación de la IA en educación en geometría, prevalecen los errores conceptuales y la necesidad de que los investigadores adecúen sus respuestas al contexto matemático específico. De este modo, el uso eficaz de la IA, posee un gran potencial en educación matemática y resolución de problemas (Lagrange et al., 2023). Sin embargo, algunos autores (e.g., Panqueban y Huincahue, 2024) han señalado que implementar la IA dentro de la educación debe ser cuidadosamente planificado y diseñado, para evitar lo mejor posible el rango de error, y con ello, lograr respuestas que sean útiles para la creación de tareas. En particular, dentro del dominio de la enseñanza de la geometría, se

logra identificar que esta área aún requiere de exploración más profunda, es decir, se reporta la necesidad de indagar en este campo investigativo. En particular, la formación del profesorado debe considerar el uso de la IA como elemento relevante en sus planes de estudio, tanto desde un punto de vista práctico, como desde la investigación. Por ello, la presente investigación tiene como objetivo de investigación *caracterizar el trabajo matemático de futuros profesores en contextos formativos de diseño de tareas geométricas con apoyo de IA*. Un marco teórico apropiado para analizar el trabajo matemático es el conocido como Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático, el cual se presenta a continuación.

Marco teórico

2.1 Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático

La Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (conocida como ETM), se entiende como un marco analítico y metodológico, que proporciona una estructura de cómo se construye y se manipula el conocimiento en un contexto educativo (Richard y Kuzniak, 2014; Kuzniak et al., 2016b). La investigación de la teoría de los ETM, se utiliza de manera amplia para la descripción, comprensión y formación del trabajo matemático, y pretende compartir la comprensión de cada individuo involucrado en el desarrollo del trabajo matemático para actuar sobre fenómenos observados (Kuzniak, 2022).

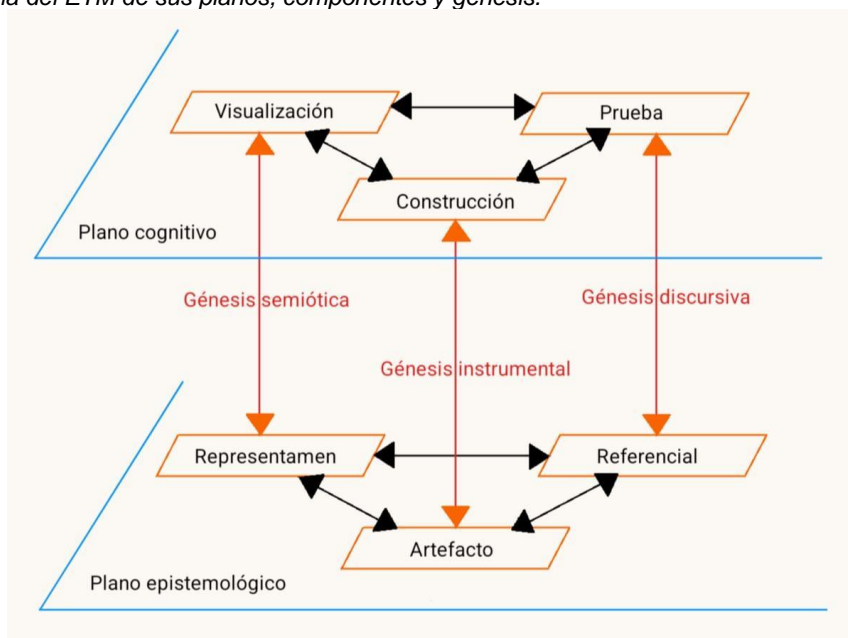
Este modelo teórico y metodológico que estudia el trabajo matemático en un contexto educativo, se presenta como una herramienta conceptual, que permite analizar en detalle actividades matemáticas de docentes o estudiantes al enfrentarse a tareas específicas (Kuzniak et al., 2016b; Kuzniak, 2022), y se concibe en un contexto que hace factible la construcción de aspectos epistemológicos y cognitivos del quehacer matemático, siendo su propósito fundamental observar cómo se construye progresivamente el significado de los objetos matemáticos, estableciendo relaciones entre sí (Kuzniak et al., 2016b).

El ETM se organiza en torno a dos planos interconectados (Figura 1), que describen el desarrollo del trabajo matemático: el *plano epistemológico* se relaciona con los conocimientos matemáticos, sus referencias y la manera en que se conceptualizan e involucra a los objetos matemáticos (Kuzniak et al., 2016b; Espinoza-Vásquez et al., 2025); el *plano cognitivo* se centra en los procesos mentales y operaciones que el individuo pueda realizar al interactuar con las tareas matemáticas, abarca las estrategias de resolución, los modos de razonamiento, la visualización, la intuición y la capacidad articular ideas (Kuzniak et al., 2016a).

Las conexiones entre el plano cognitivo y el epistemológico se entrelazan y están en interacción continua, identificándose como génesis, las cuales son: génesis semiótica, génesis instrumental y génesis discursiva (Kuzniak et al., 2016a). La *génesis semiótica* se relaciona con el uso y la manipulación de las representaciones de los objetos matemáticos, incluyendo la producción, interpretación y transformación de signos símbolos, gráficos y distintas formas de expresión matemática. La visualización y la versión dinámica de entornos tecnológicos son elementos cruciales de esta génesis (Henríquez-Rivas y Kuzniak, 2021). La *génesis instrumental* implica la interacción con los artefactos; herramientas físicas o digitales, y su posterior instrumentalización, es decir, cómo los artefactos se convierten en instrumentos cognitivos, a medida que el individuo le va atribuyendo significado y lo integra en su actividad matemática (Henríquez-Rivas et al., 2021; Henríquez-Rivas y Kuzniak, 2021). La *génesis discursiva* abarca la comunicación, argumentación, justificación y prueba, y es el proceso donde las ideas matemáticas se verbalizan, se discuten, se validan y se integran en un discurso coherente y lógico; dicha génesis es esencial para la validación del conocimiento y la construcción de argumentos matemáticos (Kuzniak et al., 2016a).

Figura 1

Diagrama del ETM de sus planos, componentes y génesis.



Fuente: adaptado de Kuzniak et al. (2016b, p. 725)

El estudio de la *circulación* se refiere a las interacciones realizadas por el individuo entre las génesis y los componentes observados al resolver la tarea (Montoya-Delgadillo et al., 2014). El análisis de las circulaciones de los ETM, considera la utilización de protocolos teóricos que relacionan las génesis y sus respectivas componentes (Henríquez-Rivas et al., 2023), ilustrando estas interacciones del trabajo matemático mediante pruebas y evidencias matemáticas (Kuzniak, 2022), y se orientan según su dominio matemático en específico (como álgebra, geometría, etc) (Montoya-Delgadillo y Vivier, 2016; Ticse et al., 2023).

Los *planos verticales* articulan los planos epistemológico y cognitivo, organizando y describiendo las interrelaciones entre las tres génesis en tres planos que ayudan a especificar sus interacciones (Kuzniak et al., 2016a; Henríquez-Rivas et al., 2021; Henríquez-Rivas y Kuzniak, 2021) para las circulaciones del trabajo matemático (Henríquez-Rivas et al., 2021). El plano conformado por las génesis semiótica e instrumental, plano vertical [*Sem-Ins*], considera un proceso de exploración sin alguna validación posterior (Henríquez-Rivas y Kuzniak, 2021). El segundo plano está compuesto por las génesis semiótica y discursiva, plano vertical [*Sem-Dis*], se centra en el desarrollo del trabajo matemático (más allá de la representación icónica) y su demostración (Kuzniak et al., 2016a). El último plano vertical está conformado por las génesis discursiva e instrumental, plano vertical [*Dis-Ins*], considera la validación de un trabajo realizado con un objeto concreto dentro de un proceso de visualización (Henríquez-Rivas y Kuzniak, 2021).

Para explorar con mayor precisión el ETM, fueron diseñados tres tipos (Kuzniak et al., 2022): de referencia, personal e idóneo. El *ETM de referencia* es la manera en que se supone los estudiantes deben comprender y realizar las tareas matemáticas que se han propuesto (Montoya-Delgadillo y Reyes-Avendaño, 2022); el *ETM personal* consiste en el trabajo que cada individuo realiza en la resolución de problemas desde su capacidad cognitiva y conocimientos

matemáticos (Menares-Espinoza y Vivier, 2022); el *ETM idóneo* es el trabajo de diseño, posibles ajustes y adaptación de la enseñanza realizado por un docente o investigador para desarrollar el *ETM personal* de los estudiantes (Henríquez-Rivas et al., 2022). El presente proyecto estudiará el *ETM personal* de futuros docentes, que relaciona los conocimientos matemáticos de los individuos para resolver alguna tarea específica (Henríquez-Rivas et al., 2023; Kuzniak, 2022), y el *ETM idóneo potencial*, que caracteriza el trabajo matemático de los futuros profesores con el motivo de prever lo que se realizará en el aula (Henríquez-Rivas et al., 2022), para potenciar el trabajo personal de los estudiantes.

Diseño de tareas

Las tareas matemáticas pueden situarse en recursos como libros de texto o manuales de enseñanza (Markle y McGavey, 2025). Por ello, el diseño de tareas matemáticas es muy importante y suscita creciente interés para los investigadores en educación matemática. Asimismo, implica que profesores sean diseñadores, los que a su vez pueden ser investigadores (Johnson y Ohtani, 2025). El diseño de tareas matemáticas incluye lo que se diseñará, las herramientas a utilizar para su diseño, y las condiciones para llevarlo a cabo (Jones y Pepin, 2016), y ofrece a los estudiantes oportunidades para idear estrategias y encontrarse con conceptos matemáticos (Sullivan et al., 2015).

En relación con el párrafo precedente, Gustafsson (2024) desarrolló borradores de tareas que compartió con profesores que le otorgaron revisiones y aclaraciones, para luego desarrollar sus tareas finales. Por otro lado, Geiger et al. (2022) generaron espacios colaborativos entre profesores e investigadores, considerando el diseño e implementación como procesos interdependientes. De este modo, la reflexión entre el diseño y la implementación de tareas surge por medio del diseño colaborativo, donde la implementación es una necesidad que impulsa ciclos de rediseño (Johnson y Otahni, 2025).

En cuanto al diseño de tareas específicamente desde los ETM, se trata de una temática que ha sido de interés, ya que cumplen el rol de mediar la resolución de problemas y participar en su activación (Kuzniak, 2022; Panqueban et al., 2024). Por ejemplo, la investigación de Gaona et al. (2022b) menciona que, aunque la tarea no es un componente directo del ETM, actúa como el activador del trabajo matemático individual (Henríquez-Rivas et al., 2021; Kuzniak et al., 2022). El ETM idóneo representa la planificación del contenido para la enseñanza (Henríquez-Rivas et al., 2022), y su análisis estudia las circulaciones que desprenden de la tarea (Kuzniak et al., 2016a; Montoya-Delgadillo et al., 2014). El ETM personal, por su parte, se enfoca en la resolución de tareas por el individuo fuera del contexto docente (Carrillo et al., 2022; Menares Espinoza y Vivier, 2022; Verdugo-Hernández et al., 2022). La presente investigación será orientada a través del análisis geométrico, referido a interpretar la geometría, con cálculos y razonamientos, donde la tarea es una activadora del trabajo matemático de un individuo (Henríquez-Rivas y Verdugo-Hernández, 2023; Henríquez-Rivas, 2021). Finalmente, el presente estudio considera el ETM personal e idóneo de futuros profesores cuando resuelven y diseñan tareas en contextos formativos con apoyo de IA.

Metodología

Antecedentes generales

La presente investigación tiene como objetivo analizar el trabajo matemático (ETM) personal e idóneo potencial, que se desarrolla en una instancia colaborativa dentro de un curso de la formación inicial docente de matemáticas, a partir del diseño y adaptación de tareas escolares de homotecia, con el apoyo de ChatGPT como herramienta principal. Para ello, se propone un estudio de enfoque cualitativo (Simons, 2011), ya que el propósito de la investigación es la interpretación y comprensión del proceso de diseño y reformulación de tareas y las decisiones didácticas implicadas por los participantes. Específicamente, el diseño se aborda desde un

estudio colectivo de casos de tipo instrumental (Stake, 1999; Flick, 2007), pues se analizarán los diferentes casos en profundidad, sobre las características de la resolución y diseño de tareas desde la perspectiva del ETM de los profesores en formación (los llamaremos FP) en tres duplas de trabajo.

Para el desarrollo de esta actividad formativa que involucra el diseño y adaptación de tareas en el contexto de FP, se consideraron tres etapas secuenciadas:

- 1) *Etapa 1: Selección de las tareas*, extraídas de libros de formación general de matemática.
- 2) *Etapa 2: Primera adaptación de las tareas*, por parte de los investigadores. Se incorpora ChatGPT para su reformulación.
- 3) *Etapa 3: Resolución y segunda adaptación* por parte de los futuros profesores, a partir de la versión realizada en la etapa 2. Esta última se divide en dos momentos, en el *momento 1*, los FP organizados en duplas de trabajo colaborativo (se denominan de aquí en adelante FPd), resolvieron las tareas adaptadas, permitiendo el uso de un software matemático (GeoGebra) para la exploración gráfica; luego, en el *momento 2*, cada FPd rediseñan ambas tareas presentadas, permitiéndoles utilizar el apoyo de IA.

Los análisis de la presente investigación se centran en la etapa 3 (momentos 1 y 2), para analizar las decisiones matemáticas y didácticas de los FPd. No obstante, para la adecuada comprensión del lector, en la sección de resultados se muestran las versiones de las tareas iniciales (etapa 1), adaptaciones (etapa 2), y resolución con las nuevas adaptaciones sugeridas por los FPd (etapa 3).

Criterios de selección de casos

La selección de los casos de este estudio, corresponden al trabajo realizado en colaboración por duplas de estudiantes organizados según su propia disposición y afinidad, conformadas por 6 FPd que cursan último año de Pedagogía en Matemática en una institución formadora de Chile. Además, los participantes tienen aprobados sus respectivos cursos de geometría y didáctica de la geometría. Su participación involucra la resolución y posterior rediseño de las tareas con el uso de sus conocimientos previos y decisiones didácticas. Adicionalmente, los FP fueron seleccionados para capturar la complejidad interpretativa de las experiencias formativas, permitiendo un análisis detallado y contextualizado (Stake, 1999; Simons, 2011).

En cuanto a los aspectos éticos, se solicitó a los participantes la firma de un consentimiento informado que detalla los objetivos y procedimientos del estudio, dejando claro que los FPd pueden retirar su participación o sus datos en cualquier momento sin consecuencias, resguardando la confidencialidad de todos los datos recolectados (videograbaciones, fotografías y registro escrito), quienes aceptaron de forma voluntaria, comprendiendo que no obtendrían beneficios directos por su colaboración.

Justificación de las tareas seleccionadas

Sobre la selección de tareas, inicialmente se extrajeron 5 tareas propuestas de documentos curriculares de la formación general de matemática para estudiantes de enseñanza secundaria chilena (e.g., Ministerio de Educación de Chile [Mineduc], 2019; Mineduc, 2020), enfocadas en el concepto homotecia, que aparece en el currículo escolar de Primer Año Medio (Mineduc, 2015). Posteriormente, tres investigadoras expertas en didáctica de la matemática con trayectoria en la formación y experiencia docente, voluntariamente realizaron una revisión de las tareas seleccionadas, considerando aspectos como la alineación con el potencial didáctico pedagógico para ser rediseñadas. Como resultado, se seleccionaron dos tareas: la primera se obtuvo de un recurso curricular diseñado para los profesores, denominado Guía Didáctica del Docente (Mineduc, 2020), que consiste en una tarea con única solución, y presenta un plano cartesiano con una escala alterada; y la segunda, se obtuvo de un recurso diseñado para

organizar los objetivos, contenidos y la metodología del trabajo pedagógico, denominado Programa de Estudio (Mineduc, 2019), que consiste en una tarea abierta que permite la exploración y visualización de los estudiantes para su resolución con posible apoyo de software, promoviendo la interpretación de distintos tipos de representación.

Recolección y análisis de los datos

La recolección de datos en la etapa 3, relacionada con la participación de los FPd, se basó en la observación participante por parte de los investigadores, la videograbación de dos momentos de trabajo, las producciones escritas de los FPd, el registro de la interacción con ChatGPT (exclusivamente en el momento 2), fotografías de su trabajo en cada sesión y archivos de softwares matemáticos utilizados por los FPd.

Para el análisis de los datos de la etapa 3, basado en la teoría del ETM personal e idóneo potencial, se consideran las cuatro acciones. Cabe señalar que, las primeras tres acciones, se relacionan con el ETM personal de los FPd (*momento 1*) y, la cuarta acción, se relaciona con el ETM idóneo de los FPd (*momento 2*). Estas acciones se describen a continuación.

- i. *Identificación de los episodios de trabajo:* Se identifican los episodios de trabajo colaborativo en FPd durante la resolución (etapa 3, *momento 1*) y adaptación (etapa 3, *momento 2*) de las tareas adaptadas, enfocados en evidenciar las acciones matemáticas y didácticas relacionadas con la homotecia.
- ii. *Descripción del trabajo:* Se describe el trabajo de cada sesión, destacando las interacciones colaborativas por los FPd.
- iii. *Análisis de la circulación del ETM personal de FPd:* Con base en la descripción del trabajo, se analiza e interpreta la circulación del ETM de las duplas. Para los análisis se utiliza un protocolo referido a las génesis y sus componentes, así como también los planos verticales asociados para dar mayor especificidad a los análisis (Tabla 1).
- iv. *Análisis de aspectos del ETM idóneo de FPd:* Se considera el análisis de los aspectos relacionados a las adaptaciones sugeridas de las tareas con apoyo de ChatGPT realizadas por los FPd, con atención en la enseñanza de estas tareas.

Para el análisis de la circulación del ETM personal de los FPd, se contempla la trayectoria de la identificación del trabajo matemático basada en categorías previamente utilizadas en otras investigaciones (Henríquez-Rivas y Verdugo-Hernández, 2023), como se ve a continuación (Tabla 1).

Tabla 1

Protocolo para el análisis de la circulación en el ETM personal de los FPd.

Criterio	Componentes	Descripción
<i>Génesis semiótica</i>	Representamen	Relaciona objetos matemáticos y sus elementos significantes (como signos y/o figuras geométricas).
	Visualización	Interpreta y relaciona los objetos matemáticos según actividades cognitivas asociadas a registros de representaciones semióticas (como tratamientos, conversiones, etc).
<i>Genesis Instrumental</i>	Artefacto	Utiliza artefactos de tipo material, sistema simbólico o tecnológico.
	Construcción	Se basa en los procesos por medio de las acciones que desencadenan los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas.
<i>Génesis Discursiva</i>	Referencial Prueba	Utiliza definiciones, propiedades o teoremas. El razonamiento discursivo se basa en diferentes maneras de justificación, argumentación o demostración.
<i>Plano vertical</i>	[Sem-Ins]	Utiliza artefactos en la construcción de resultados bajo ciertas condiciones o para la exploración de representaciones semióticas.
	[Ins-Dis]	El proceso de prueba consiste en la validación de una construcción o en la experimentación con el uso de un artefacto.
	[Sem-Dis]	Relaciona el proceso de visualización de los objetos representados con un razonamiento discursivo para probar.

Fuente: Adaptado de Henríquez-Rivas y Verdugo-Hernández (2023, p. 189).

El proceso de codificación de los datos fue llevado a cabo por los investigadores del estudio, quienes revisaron las respuestas y asignaron códigos según el protocolo descrito anteriormente (Tabla 1). En una etapa posterior, los investigadores analizaron en conjunto los códigos asignados hasta llegar a un consenso que les permitió interpretar la información (Creswell y Creswell, 2023).

Resultados

En lo que sigue, se presentan los análisis por tarea (se denominan $t1$ y $t2$) según lo descrito en la metodología, las cuales han sido seleccionadas y rediseñadas en el contexto de formación inicial de docentes de matemática (FP), a fin de caracterizar el trabajo matemático realizado por las tres duplas de FP (llamadas FPd1, FPd2 y FPd3). Para dar contexto, se presenta cada tarea en la versión original (etapa 1), luego el desarrollo de la versión adaptada con apoyo de IA (etapa 2), y finalmente, se presentan los análisis del trabajo matemático realizado por cada FPd, según el *momento 1* y *momento 2*, correspondientes a la etapa 3.

Tarea 1: Homotecia en el sistema de coordenadas cartesianas

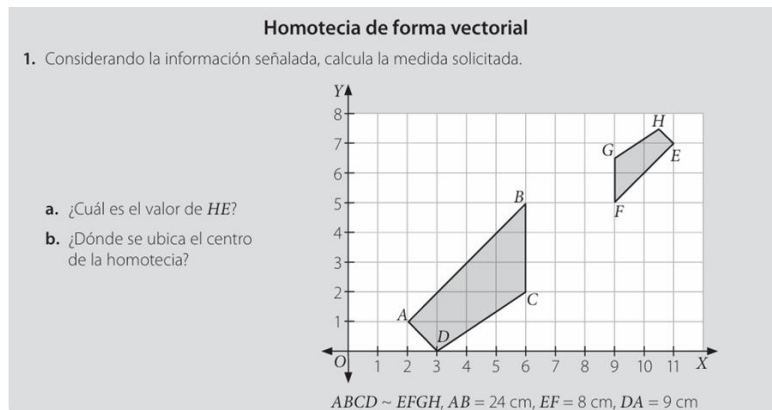
A continuación, se muestran de manera secuenciada los resultados de la etapa 1, 2 y 3 de la tarea $t1$, considerando lo señalado anteriormente.

Tarea en versión original (etapa 1)

Esta tarea fue extraída de la Guía didáctica del docente (Mineduc, 2020), presentándose a continuación.

Figura 2

Tarea inicial t1.



Fuente: Guía didáctica del docente (Mineduc, 2020, p. 128).

Tarea adaptada (etapa 2)

Para realizar la adaptación de la tarea original, se recurrió al apoyo de ChatGPT, con el objetivo principal de transformar la actividad original, la cual poseía un carácter estático y algorítmico, a una versión que se pretendió fuera dinámica, interactiva y exploratoria, mediante la integración del software GeoGebra.

En primer lugar, se alimenta a la IA con documentos claves del marco teórico previamente analizados en el transcurso de esta investigación, con la instrucción explícita de limitar su respuesta exclusivamente a evidencias y conceptos derivados de los artículos sobre el trabajo matemático y el diseño de tareas adjunto, con la intención de evitar información externa. Posteriormente, se adjunta la tarea original que se basaba en preguntas directas e incluía un gráfico estático, solicitando a ChatGPT, modificar la tarea y enunciados que esta poseía, otorgando sugerencias iniciales de reestructuración, como por ejemplo, preguntas orientadas a la construcción de polígonos y la aplicación de homotecia, permitiendo al equipo de investigadores, identificar esta oportunidad para potenciar la manipulación dinámica y la exploración de propiedades geométricas con el uso del software, fomentando con ello, la génesis instrumental del ETM y favoreciendo el arrastre de puntos y figuras, para la observación de diferentes configuraciones geométricas. Por otro lado, se decide evitar depender de figuras predefinidas, optando por ubicar coordenadas específicas de puntos en el plano cartesiano, lo que permite una verificación simultánea, algebraica y gráfica.

Posteriormente, se decide fomentar la autonomía de los estudiantes. Cabe señalar que, inicialmente la tarea era de carácter procedimental, enfocada en cálculos directos sin una profunda justificación de las respuestas obtenidas. En contraste con esto, ChatGPT propone explorar qué ocurre al cambiar el centro de homotecia, lo que llevó al grupo de investigadores a refinar estos elementos con la intención de enfatizar en la génesis discursiva, es decir, conseguir una comunicación matemática mediante argumentaciones basadas en observaciones obtenidas del software, analizando deducciones sobre semejanzas y proporciones, añadiendo

además, preguntas abiertas sobre la varianza al arrastrar figuras, lo cual permite descubrir propiedades de la homotecia.







ChatGPT ayudó de manera significativa como base para la reestructuración de la tarea original. Posteriormente, los investigadores deciden reinterpretar y mejorar las ideas que se han obtenido de la interacción con la IA, evitando un guiado excesivo que pudiese entorpecer el descubrimiento autónomo de los FPd. Así, se ajusta la redacción, promoviendo preguntas con la intención de que los FPd interactúen de manera libre con el software para identificar propiedades y/o conceptos relevantes sobre homotecia.

En consecuencia, resulta una tarea que permite desarrollar habilidades de exploración, argumentación y reflexión metacognitiva sobre la homotecia, favoreciendo la circulación entre las génesis del ETM en los FPd, quedando así la siguiente versión de *t1*:

Figura 3

Tarea adaptada t1.

Actividad con GeoGebra.

1. Abra la aplicación GeoGebra () , seleccione la herramienta ( Punto) y ubique los puntos $A(2,1)$, $D(3,0)$, $C(6,2)$, $B(6,5)$, $E(11,7)$, $H(10.5,7.5)$, $G(9,6.5)$ y $F(9,5)$ en el plano.
2. Seleccione la herramienta ( Poligono) y construya los cuadriláteros $ADCB$ y $EHGF$.
 - 2.1. Explore las herramientas de GeoGebra para medir longitudes () y/o áreas () para analizar los cuadriláteros $ADCB$ y $EHGF$ ¿Qué se puede deducir de ambos polígonos? Fundamente su respuesta.
3. Trace las rectas ( Recta) que unan cada vértice del cuadrilátero $ADCB$ con sus vértices homólogos en $EHGF$.
 - 3.1. Identifique el punto donde convergen estas rectas. Nombre este punto como O y justifique por qué este punto es el centro de la homotecia.
4. Si arrastras el cuadrilátero $EHGF$ a una nueva posición sin alterar todas sus diferentes configuraciones ¿Qué ocurre con el centro de homotecia?
 - 4.1 ¿Qué elementos invariantes observas entre las figuras luego de arrastrar el cuadrilátero? ¿Ocurrirá siempre lo mismo? ¿Por qué?

Fuente: Elaborada por los autores.

Análisis del trabajo matemático de los FPd (etapa 3)

Los análisis que siguen, se organizan según 3 casos (que corresponden a las duplas de trabajo FPd1, FPd2 y FPd3, respectivamente), a partir de los momentos 1 y 2 descritos en la sección metodológica.

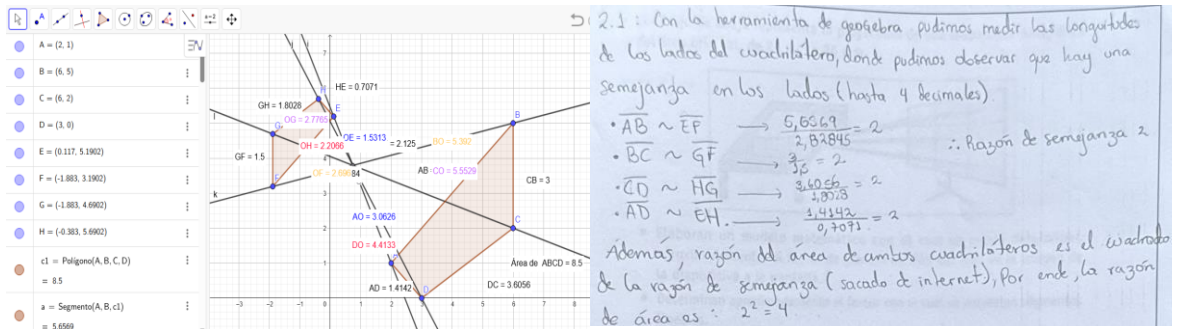
ETM personal de los FPd (momento 1)

Caso 1: FPd1

Se identifican cuatro episodios (E) de trabajo asociados a una estrategia desarrollada por FPd1. En E1, la *construcción en software geométrico según el enunciado de la tarea*, considera la

conversión de las indicaciones algebraicas en un plano cartesiano de la representación de un polígono ADCB y su figura homotética EHGF determinada (Figura 3). En E2, las *relaciones entre los polígonos diseñados en GeoGebra*, consideran conceptos propios de la homotecia, a través de herramientas del software matemático, que involucran la medición de distancias y segmentos de un punto homólogo a otro. Las semejanzas identifican las razones de homotecia, con datos de hasta 5 decimales, donde la razón de homotecia (se le llama razón de semejanza) obtenida es 2 y el área es 4. En E3, la *identificación del centro O de homotecia*, añaden el punto principal que propicia el discurso y desarrollo del razonamiento deductivo de propiedades de la homotecia. En el episodio E4, *desarrollan la prueba de la razón de homotecia*, considerando las longitudes de los vértices al centro O, obteniendo regularidades por medio del traslado del polígono EHGF.

Figura 4
Registro geométrico y algebraico de FPD1.



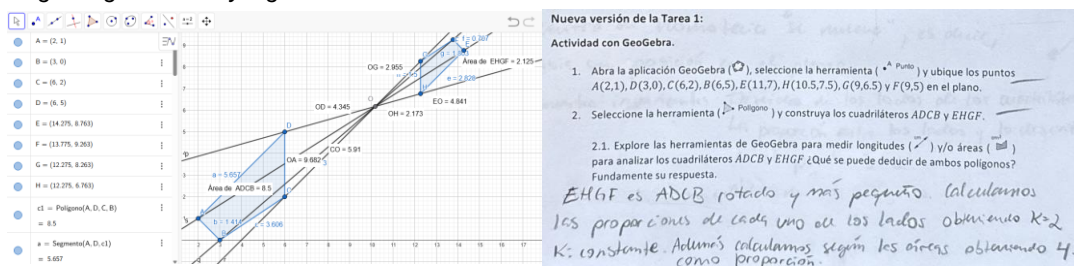
Fuente: elaborado por FPD1.

El análisis de la circulación, en E1, se representan los objetos geométricos del enunciado en el lenguaje figural y simbólico, con el uso de un artefacto tecnológico, activando el plano vertical [Sem-Ins]. En E2, considera de forma explícita el plano vertical [Sem-Ins], dado por la interacción con el artefacto y visualización, con el componente referencial teórico al considerar las propiedades de los lados de los polígonos. En E3, se explicita el componente referencial teórico del plano epistemológico, por la identificación de propiedades de la homotecia. En consecuencia, el plano vertical [Sem-Dis] se activa en este episodio de trabajo, pues involucra la validación de la homotecia y la visualización por el hallazgo de relaciones entre los cuadriláteros por medio del uso del software, lo que a su vez implica la aparición del plano [Ins-Dis]. Posteriormente, en E4, se reafirma el trabajo desde el plano vertical [Ins-Dis], por la experimentación geométrica y, por ende, el razonamiento deductivo dado el trabajo previo con el software.

Caso 2: FPD2

Se identifican 4 episodios de trabajo asociados a la estrategia desarrollada por FPD2, la cual fue analizada de la misma manera que la dupla FPD1, ya que se considera una estrategia de resolución similar, utilizando los mismos elementos geométricos, con el uso de GeoGebra como artefacto tecnológico para la construcción de la situación problema planteada, y una secuencia de episodios análoga. Estas similitudes justifican que el análisis para el desarrollo de FPD2 se realiza del mismo.

Figura 5
Registro geométrico y algebraico de FPd2.

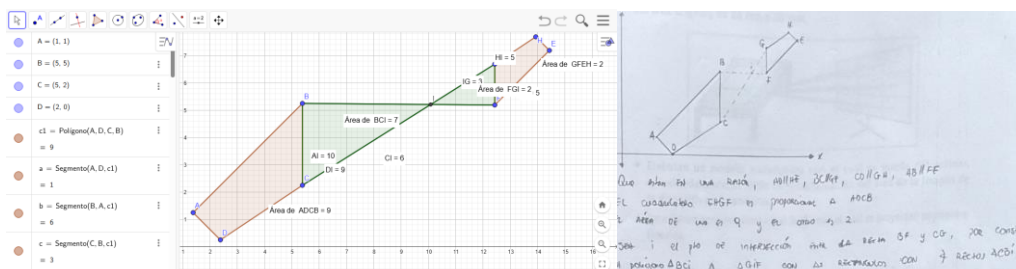


Fuente: elaborado por FPd2.

Caso 3: FPd3

Se identifican cinco episodios de trabajo asociados a una estrategia desarrollada por FPd3. En E1, la *construcción con artefactos materiales*, contempla un dibujo trazado a mano alzada con uso de lápiz y regla en papel de dos polígonos ADCB y EHGF. Luego, en E2, en la *construcción en software geométrico según lo indicado en el enunciado*, consideran la realización de las figuras homotéticas ADCB y EHGF en GeoGebra. En E3, en las *relaciones entre los polígonos diseñados en GeoGebra*, consideran los paralelismos $AD//HE$, $BC//GF$, $CD//GH$ y $AB//FE$, en el orden indicado. De esta forma, señalan que los cuadriláteros son proporcionales y sus áreas aproximadas son 9 y 2 unidades cuadradas, según las figuras ADCB y EHGF, respectivamente. En el episodio E4, en el *trazado de segmentos e identificación del centro de homotecia*, consideran la construcción de los segmentos BF y CG, donde su intersección se denomina I (Figura 8), diferente a lo indicado en el enunciado, evidenciando un error conceptual con el software sobre la diferencia entre rectas y segmentos (se identifica bloqueo 1). En E5, *prueba de semejanza de triángulos*, identifican y prueban la semejanza con sustento en el teorema lado-ángulo-lado, entre los triángulos rectángulos graficados (nombrados como BCI y GFI), obteniendo una razón de homotecia de 3:2. Esto evidencia un error conceptual al no considerar las figuras originales (ADCB y EHGF), confundiendo la razón de semejanza de los triángulos con la razón de homotecia de los cuadriláteros (se identifica bloqueo 2). En E6, la *identificación de invariantes de los polígonos*, considera por medio de la traslación de figuras homotéticas, que el punto de homotecia, las dimensiones de los lados de los cuadriláteros y sus áreas se mantienen.

Figura 6:
Registro geométrico y algebraico de FPd3.



Fuente: elaborado por FPd3.

El análisis de la circulación, en E1, se activa el plano vertical [Sem-Ins] mediante la construcción del plano cartesiano con dos polígonos a mano con el uso de la regla como artefacto, y en E2,

se activa el mismo plano vertical [Sem-Ins] por la representación de los objetos geométricos según el enunciado con el uso de un artefacto tecnológico. En E3, por la interacción entre la visualización y el artefacto GeoGebra se activa el plano vertical [Sem-Ins], y se trabaja el componente referencial teórico, al considerar proporciones y lados paralelos de los cuadriláteros. En E4, utilizan el artefacto tecnológico como medio para visualizar relaciones de semejanza, activando el plano vertical [Sem-Ins], para luego activar el plano vertical [Sem-Dis] en la prueba escrita y fundamentada de la semejanza de triángulos observada. En E5, se activa el plano vertical [Sem-Dis], debido a la prueba de semejanza entre los triángulos identificados por la exploración y trabajo con el software. En el episodio E6, se activa el plano vertical [Ins-Dis], por la exploración con el software geométrico, discutiendo y deduciendo elementos invariantes de las figuras, a través de la visualización.

ETM idóneo de los FPd (momento 2)

Caso 1: FPd1

Para mejorar *t1*, los FPd1 mencionan que se podría incorporar razonamientos discursivos para explicar el trabajo realizado con el software, señalan: “El cambio que haríamos es que en vez de trabajar solamente en GeoGebra pueden escribir en una bitácora todos los pasos que realizaron para que puedan tenerlo de registro para estudiar”. Asimismo, para implementar *t1* a nivel escolar (en secundaria), la dupla de FPd1 considera aspectos de la organización e implementación de la tarea en el aula, propiciando instancias de trabajo tecnológico entre los estudiantes, con la intención de propiciar instancias de discusión y reflexión, dicen: “trabajar en el laboratorio de computación” y además “trabajar en grupos para complementar ideas” lo que permite intercambiar deducciones, ideas y análisis.

Caso 2: FPd2

Para mejorar *t1*, los FPd2 mencionan que es importante precisar los procesos asociados con la génesis instrumenta y uso de los artefactos en las instrucciones de la tarea, proponiendo que se utilicen herramientas específicas para minimizar los errores que se podrían llegar a presentar por los decimales, ya que GeoGebra por defecto, solo arroja un decimal (a menos que esto se cambie de forma manual), y con ello, lograr una mejor experiencia en la utilización del software: “Debido a los decimales, utilizar la vista algebraica para ingresar los puntos para evitar errores con la precisión del mouse”. Esta sugerencia hace alusión a la dificultad que puede generar ubicar manualmente los puntos que brinda la tarea, lo que puede llegar a afectar el posterior desarrollo. De este modo, se destaca que se pone atención en procesos de instrumentación e instrumentalización, propios de la génesis instrumental. Adicionalmente, para implementar *t1* en el aula de secundaria, la dupla de FPd2 considera que “el establecimiento cuente con un laboratorio de computación o sino, que los estudiantes puedan llevar a sus clases computador o algún dispositivo móvil”. De este modo, se destaca la relevancia que atribuyen al uso de artefactos tecnológicos como usuarios, y no como observadores de lo que el profesor exhibe.

Caso 3: FPd3

Para mejorar *t1*, los FPd3 consideran aspectos de la tarea y su enunciado, pues mencionan que es importante incorporar el propósito pedagógico de la actividad y una conexión con el mundo real, es decir haber brindado un contexto a la situación: “La tarea en sí está todo bien redactado... solo mejoraríamos o aclararemos, el propósito pedagógico, más allá de la homotecia y poder facilitar más el uso de GeoGebra”. En donde manifiestan que, si bien la tarea es dinámica dentro del software, el propósito o la finalidad de está no se encuentra visible. La dupla, propone formular un objetivo a la actividad, para aclarar a los estudiantes el motivo de porque deben realizarla. Adicionalmente, para implementar *t1* en el aula, la dupla de FPd3 considera que utilizar el GeoGebra, será de gran ayuda pues es una “herramienta útil y poderosa” para la implementación en las clases.

En general, se observa una alta valoración al uso de tecnología, así como que el profesor ponga atención en la adecuada redacción del enunciado y propiciar instancias de razonamientos discursivos.

Tarea 2: Homotecia en una tarea en contexto

A continuación, se muestran de manera secuenciada los resultados de la etapa 1, 2 y 3 de la tarea t2 considerando lo mencionado en el punto 4.

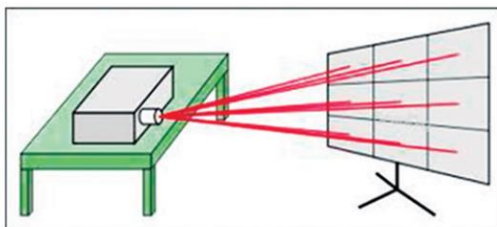
Tarea en versión original (etapa 1)

Esta tarea fue extraída del Programa de estudio (Mineduc, 2019), presentándose a continuación.

Figura 7

Tarea inicial t2.

- El dibujo de abajo representa la proyección de una diapositiva fotográfica del área original, de 24 mm x 36 mm.



- Elaboran un modelo matemático con el cual se puede determinar, aproximadamente, el factor de transformación del área de la imagen de la diapositiva a la pantalla.
- Determinan aproximadamente el factor con el cual se proyectan segmentos lineales.

Fuente: Programa de estudio (Mineduc, 2019, p. 140).

Tarea adaptada (etapa 2)

Para comenzar a realizar la adaptación de la tarea original, se recurrió al apoyo de ChatGPT, con el objetivo principal de transformar la actividad original, que poseía un carácter abstracto y descontextualizado, hacia una versión más realista y pedagógicamente enriquecida. Para comenzar este proceso, se inició alimentando a ChatGPT con documentos del marco teórico para restringir sus sugerencias a conceptos validados en artículos previos, seguido de adjuntar la tarea original, siendo esta una tarea que incluye un esquema estático de un proyector. Se le solicita a ChatGPT modificar la tarea en sí y enunciados que esta posea, generando propuestas al respecto de la redacción de la tarea, incorporando un contexto cercano a los estudiantes para lograr facilitar la conexión con experiencias cotidianas, potenciando así la génesis semiótica del ETM, mediante una vinculación de representaciones y contexto realista.

Mediante lo anterior, el equipo de investigadores decide reinterpretar y refinar elementos de la tarea para generar un enfoque que desarrolle la exploración e indagación, en este caso ChatGPT propone medidas específicas con factores de cambio sencillos, pero el equipo investigativo decide ajustar la tarea para generar una estrategia abierta, mediante el uso de

proporciones, lo que tendría como consecuencia, promover deducciones autónomas mediante la exploración, integrando la justificación correspondiente, sin generar guías hacia la solución de la tarea.

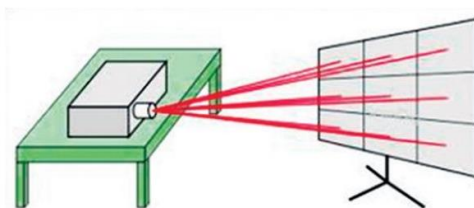
Es por ello, que el desarrollo de lo anterior permite a los FPd desarrollar habilidades de verificación y argumentación con respecto a transformaciones geométricas, mediante la identificación de la razón de cambio, desarrollando con ello la génesis instrumental, semiótica y discursiva, lo cual permite obtener la siguiente versión de *t2*.

Figura 8

Tarea adaptada *t2*.

En una sala de clases, un proyector muestra en la pantalla una fotografía que originalmente está en una diapositiva rectangular de 24 mm de alto por 36 mm de ancho.

Al proyectarse, la imagen se ve más grande, como en la figura que se ve a continuación:



De lo anterior, propongan una estrategia o modelo que les permita hallar el área de la imagen proyectada relacionando los datos de la figura original y las de la proyección.

Usando la proporción entre el área de la figura original y la figura proyectada, determinen cuántos centímetros aumentaron los lados de la figura original.

Fuente: Elaborada por los autores.

Análisis del trabajo matemático de los FPd (etapa 3)

Los análisis que siguen, al igual que el análisis para *t1*, se organizan según 3 casos (que corresponden a cada dupla de trabajo), a partir de los momentos 1 y 2 descritos en la sección metodológica.

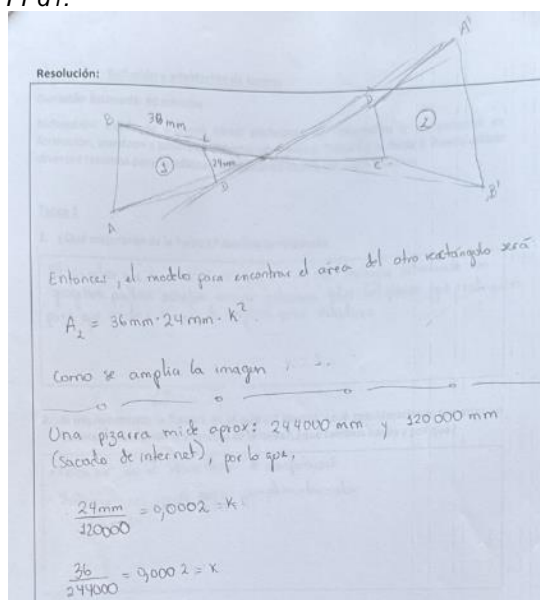
ETM personal de los FPd (momento 1)

Caso 1: FPd1

Se identifican 3 episodios (E) de trabajo asociados a una estrategia desarrollada por la dupla FPd1. En E1, la *construcción de una figura a mano alzada*, a partir de la indicación del enunciado. No utilizan otras representaciones semióticas. En E2, la *identificación del área de la imagen proyectada*, en la cual se considera una generalización de la razón del área de las figuras. En E3, la *utilización de un ejemplo concreto*, consideran la búsqueda en internet de dimensiones reales de una pizarra para conocer el aumento de la figura original.

Figura 9

Desarrollo de la dupla FPd1.



Fuente: Elaborada por FPd1.

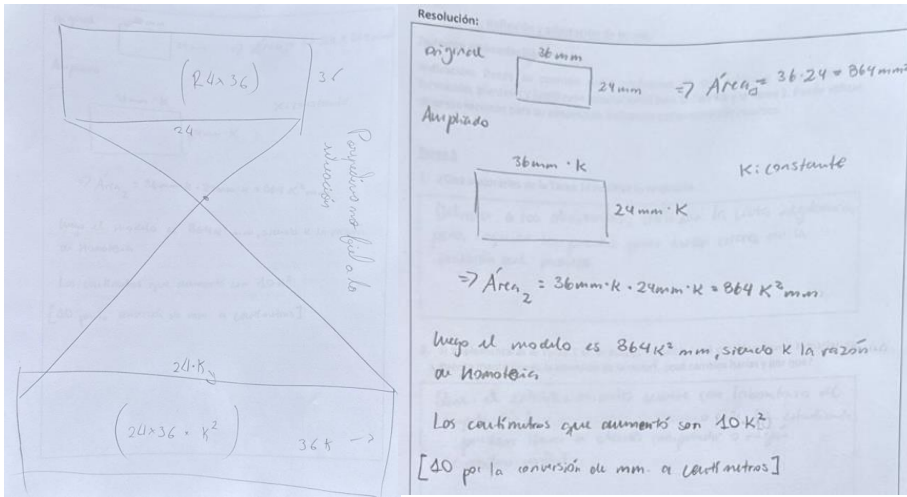
El análisis de la circulación, en E1, se activa el plano vertical [Sem-Ins], mediante la construcción de la figura a mano alzada. En E2, predomina el plano vertical [Sem-Dis] al generalizar la razón de las áreas como el cuadrado de la razón de homotecia (k^2), lo que exige un discurso matemático (pseudo)deductivo basado en propiedades de la homotecia. Finalmente, en E3, por medio del uso de un artefacto, se hace presente (parcialmente) el plano vertical [Ins-Dis], aunque no se fundamentan y/o validan las respuestas.

Caso 2: FPd2

Se identifican 3 episodios (E) de trabajo asociados a una estrategia desarrollada por la dupla FPd2. En E1, la *construcción de una figura con lápiz*, considera la representación dibujada a mano alzada del enunciado. En E2, la *comparación de nuevas representaciones figurales*, buscan la relación de la figura original y la proyectada hipotéticamente. Y en E3, *desarrollan la fundamentación de la razón de homotecia*, donde consideran una ecuación que relaciona ambas figuras rectangulares para obtener la razón de homotecia.

Figura 10

Desarrollo de la dupla FPd2.



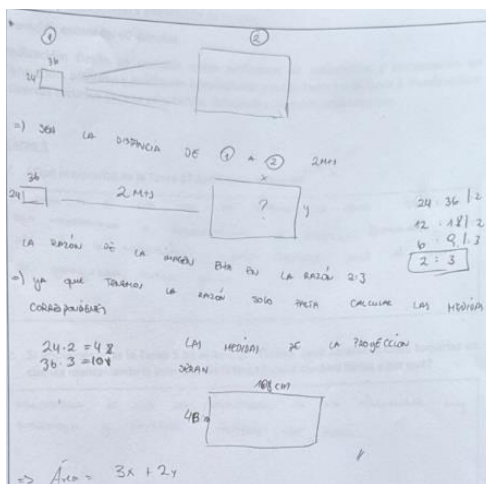
Fuente: Elaborada por FPd2.

El análisis de la circulación, en E1, se caracteriza por el bosquejo figural usando lápiz para la representación del enunciado, que activa (parcialmente) el plano vertical [Sem-Ins], sin el uso de otras herramientas. En E2, se destaca la activación del componente referencial, ya que consideran las propiedades de un rectángulo. Finalmente, en el episodio E3, se aprecia la intención de activar la componente de prueba, sin hacer énfasis en la interacción con la construcción inicial ni la validación de sus resultados.

Caso 3: FPd3

Se identifican 3 episodios (E) de trabajo asociados a una estrategia desarrollada por la dupla FPd3. En E1, el *diseño de bosquejo a mano alzada*, la dupla considera el uso de lápiz y papel de dos cuadrados (uno pequeño y uno grande) para la representación del contexto del enunciado. En E2, en la *identificación de la razón de las figuras dibujadas*, se consideran los lados del cuadrado pequeño como 24:36 y la simplificación a la mínima expresión de estos, donde identifican la razón como 2:3 para una proyección de 2 metros de distancia, sin considerar el cuadrado grande en absoluto, lo cual evidencia un error conceptual (bloqueo 3) en una respuesta sin fundamento. En E3, *un caso particular y la prueba de la razón generalizada*, consideran las medidas iniciales para luego multiplicar por la razón 2:3, formulando una expresión de dos variables, donde x e y son largo y alto del cuadrado grande respectivamente, e identifican que la razón de homotecia es el área de la figura, definida como $3x + 2y$, relacionado directamente con lo obtenido en el episodio anterior, confundiendo la razón de homotecia con una simplificación (bloqueo 4).

Figura 11
Desarrollo de la dupla FPD3.



Fuente: Elaborada por FPD3.

El análisis de la circulación, considera en E1, que se activa el plano vertical [Sem-Ins], pues se utiliza un artefacto material (lápiz) para la construcción de figuras representativas del enunciado. En E2, se presenta la activación del componente referencial teórico y la construcción de cuadrados a mano alzada, por lo que se activa el plano vertical [Ins-Dis]. En E3, se activa el componente discursivo de prueba para la generalización de la razón y la construcción de una nueva figura con nuevas dimensiones, activando el plano vertical [Ins-Dis].

ETM idóneo de los FPd (momento 2)

Caso 1: FPD1

Para mejorar la tarea 2, los FPD1 mencionan que es relevante revisar la claridad del enunciado y la secuencialidad acorde a la edad de los estudiantes a los que se les presente la tarea. Además, se menciona que puede ser beneficioso utilizar internet para una mejor comprensión de la tarea, en donde a su vez, la secuencia que se realizaría permitirá desglosar "pasos" acordes a la edad de los estudiantes para permitir el posterior desarrollo de esta. Para implementar esta tarea en la escuela, la dupla de FPD1 considera que se deberían de utilizar un artefacto diferente a lo que plantea la versión dada de la tarea (cintas métricas), pues les permita tomar las medidas correspondientes de la pizarra, para que así se puedan tener mediciones reales. Cabe destacar que estas mejoras fueron inspiradas y apoyadas por el uso de IA, específicamente ChatGPT, lo que permitió dar un enfoque secuencial a la tarea 2, proponiendo así una nueva versión que se encuentra a continuación.

Figura 12

Registro de IA y propuesta de mejora de FPD1.

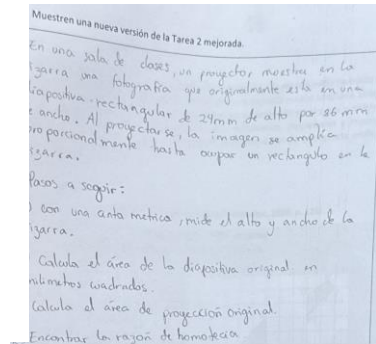
■ Tarea 2 (versión con medición en sala)

En una sala de clases, un proyector muestra en la pizarra una fotografía que originalmente está en una diapositiva rectangular de 24 mm de alto por 36 mm de ancho.

Al proyectarse, la imagen se amplía proporcionalmente hasta ocupar un rectángulo en la pizarra.

Para resolver:

1. Con una cinta métrica, mide el alto y ancho de la proyección sobre la pizarra.
2. Calcula el área de la diapositiva original en milímetros cuadrados.
3. Determina el factor de aumento lineal (razón de semejanza) entre la diapositiva y la proyección.
4. Calcula el área de la proyección, usando las medidas que obtuviste.
5. Explica la relación entre el factor lineal y el factor de aumento del área.
6. Reflexiona: ¿Por qué el área crece más rápido que los lados cuando una figura se amplía?



Fuente: elaborado por FPD1.

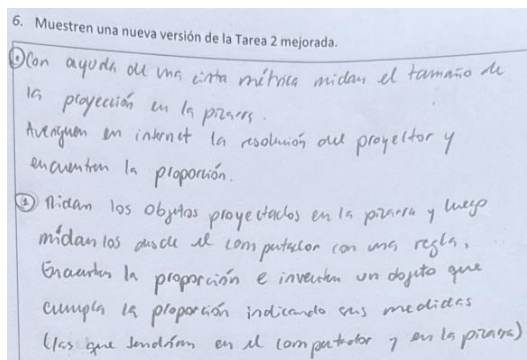
Caso 2: FPD2

Para mejorar la tarea 2, los FPD2 se focalizan en el plano epistemológico, pues mencionan que es necesario incorporar medidas reales de una proyección dentro del aula, así como también, la incorporación de píxeles que permitan una mayor comprensión y una experimentación concreta. Mencionan además que descartaron utilizar la última línea del enunciado de la tarea (al proyectarse, la imagen se ve más grande, como en la figura que se ve a continuación), ya que, sin esto último, se proyecta a distintas formas de resolución.

Para implementar esta tarea en el aula, los FPD2 mencionan que es relevante agregar mediciones para que los estudiantes sean capaces de comprender las distintas dimensiones que se encuentran entre el proyector y lo proyectado. Cabe destacar que, se apoyaron de IA para la idea de realizar una conversación a píxeles, ya que también es una forma de ver el problema y poder resolverlo. A continuación, en Figura 13, FP2 presentan el enunciado con las modificaciones correspondientes.

Figura 13

Propuesta de mejora de FPD2.



Fuente: elaborado por FPD2.

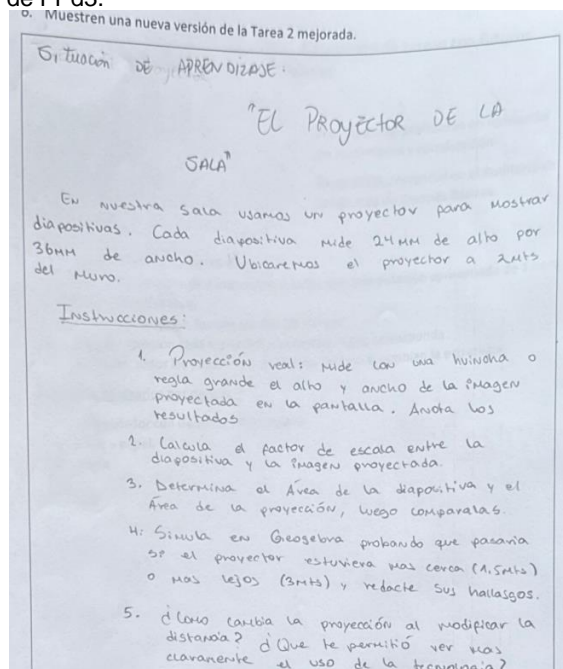
Caso 3: FPD3

Para mejorar la tarea 2, los FPD3 mencionan que es necesario entregar datos reales, es decir trabajar con números. Además, mencionan que es relevante mostrar distintas formas de presentar la relación que se genera entre el proyector y la imagen proyectada, así como por ejemplo considerar la distancia que poseen, es decir que esta no sea fija, sino que se pueda mover para así realizar este análisis y observar elementos o procedimientos que tengan en común al variar esto. Por su parte, plantean que es necesario incorporar algún software educativo que permita simular la proyección de la tarea, además de solicitar a los estudiantes que puedan detallar el paso a paso de los cálculos que vayan realizando, permitiendo así que los estudiantes puedan justificar sus decisiones y cálculos correspondientes.

Para implementar esta tarea en el aula, los FPD3 plantean que aplicarían las mejoras descritas anteriormente, en donde realizarán la situación con materiales tangibles, es decir realizar el experimento durante el transcurso de la clase, para que los estudiantes puedan tomar medidas reales, y con ello logren trabajar la habilidad de modelar. Cabe mencionar que, en este caso también se apoyaron de IA, especialmente ChatGPT para incorporar estas nuevas mejoras y con ello, realizar el nuevo enunciado de la tarea 2 que se presenta a continuación.

Figura 14

Propuesta de mejora de FPD3.



Fuente: elaborado por FPD3.

En general, se destaca que las mejoras en torno a la tarea 2, considera uso de artefactos materiales y la revisión del enunciado de la tarea, a fin de que sea más cercana a un contexto "real" para los estudiantes.

Discusión y Conclusiones

El presente estudio muestra el trabajo matemático de futuros profesores, con atención en la etapa 3 que se basa en 2 momentos, el *momento 1* cuando los FP resuelven $t1$ y $t2$, y el *momento 2*, que es cuando los FP analizan y discuten posibilidades de rediseño de $t1$ y $t2$. De este modo, el objetivo de investigación considera caracterizar el trabajo matemático de FP en contextos formativos de diseño de tareas geométricas con apoyo de IA, donde los resultados revelan las capacidades que tienen los FP al momento de diseñar tareas con IA, activando las diversas génesis, componentes y planos verticales del ETM, mediante la resolución y adecuación de tareas de homotecia. Cabe señalar que, se evidencian dificultades en el desarrollo matemático presentado.

Mediante el análisis realizado en base al ETM, permite caracterizar los procesos de resolución que fueron presentados anteriormente de $t1$ y $t2$ por parte de los FP, evidenciando que en este momento del análisis se pone en práctica el ETM personal, haciendo relación entre el conocimiento y los FP. Por otro lado, cuando se desarrolla el *momento 2* de rediseño de $t1$ y $t2$, se pone en evidencia el análisis mediante el ETM idóneo potencial, pues los FP deben tomar decisiones desde la perspectiva de la enseñanza, con el fin de reestructurar las tareas para una mayor comprensión y potencial de estas, también se caracteriza el trabajo matemático que los FP desarrollan. Un punto importante en el transcurso de los 2 momentos desarrollados por los FP, es considerar que se integraron herramientas tecnológicas para su resolución y rediseño (uso de GeoGebra y ChatGPT), lo que tiene como consecuencia la activación de la génesis instrumental, ya que se desarrollaron interacciones con dichas herramientas tecnológicas, facilitando con ello la exploración y visualización de conceptos geométricos relevantes para el transcurso de las tareas; tal como señala Gaona et al. (2022a), los artefactos son cruciales para promover la estructura epistemológica de la construcción del conocimiento matemático por el potencial que la tecnología posee. Por su parte Henríquez-Rivas y Kuzniak (2021), señalan que el uso de herramientas del software favorece procesos de instrumentalización e instrumentación asociados con la génesis instrumental. Adicionalmente, en el *momento 1*, al desarrollar $t1$ y $t2$, la génesis discursiva se activó al momento en que los FP tenían que justificar y validar sus observaciones y de ello, construir un argumento matemáticamente sólido, lo que como señala Kuzniak et al. (2016a), la verbalización y validación son procesos clave para que se impulse el trabajo matemático.

Al situarse en el *momento 1*, específicamente en $t1$, centrada en homotecia en el plano cartesiano, permite observar que FPd1 y FPd2, lograron una circulación fluida entre las génesis semiótica e instrumental, acompañado del uso de GeoGebra, permitiendo explorar diversas propiedades y elementos claves que les permitió validar sus justificaciones y conjeturas. A pesar de esto, al observar a FPd3, se evidencian bloqueos conceptuales, como por ejemplo al aplicar herramientas del software y al confundir semejanza de triángulos con la razón de homotecia, lo que pone en evidencia la necesidad de tener un dominio sobre algunos conceptos base para el desarrollo de $t1$, con el fin de utilizar la tecnología de manera efectiva. Para Lagrange et al. (2003), es necesario una integración de artefactos tecnológicos con una profunda reflexión epistemológica y didáctica, para evitar interpretaciones erróneas de lo observado tecnológicamente.

Por otro lado, al centrarse en $t2$, concretamente en el momento 1, cuando se pide resolver una tarea contextualizada en un aula de clases, se observa que predomina la génesis discursiva, ya que los FP debían realizar conexiones mediante su propio razonamiento para posteriormente construir argumentos matemáticos. En este punto es relevante hacer un hincapié en la importancia que tuvo el rediseñar dicha tarea, ya que se logró identificar la génesis discursiva, que era lo esperado, pues como menciona Kuzniak et al. (2016a), la tarea y la adaptación de esta, permite identificar la dinámica del trabajo matemático, es decir relacionar el contenido matemático y la naturaleza del trabajo matemático. Por lo cual, el rediseño de $t2$, permite analizar cuidadosamente cómo los FP exploran, discuten y validan sus justificaciones mediante argumentos sólidos.

En relación con lo anterior, el proceso del diseño de tareas con apoyo de ChatGPT puede ser valioso para realizar transformaciones de tareas estáticas a dinámicas ($t1$) y contextualizadas ($t2$). Sin embargo, es importante recalcar que incorporar una reflexión pedagógica requiere que, quien diseñe la tarea debe tener aspectos claros, como lo que desea obtener de dicha tarea y los elementos y componentes que desea activar en el transcurso del desarrollo de esta, así como menciona Gaona et al. (2022a), la tecnología no es un fin en sí mismo, sino más bien un medio significativo para la comprensión y conceptualización del trabajo matemático.

En términos generales, consideramos que caracterizar el trabajo matemático de FP en el diseño de tareas geométricas con el apoyo de IA, utilizando la teoría de los ETM, ha permitido analizar y a su vez potenciar la circulación entre las génesis durante la resolución y posterior adaptación que realizaron los FP. Asimismo, es importante recalcar la importancia de la tecnología, en este caso de GeoGebra y ChatGPT, para potenciar la exploración y posterior argumentación, pero este proceso debe ser acompañado de la revisión y supervisión de otro. De ello, se considera relevante preparar a los FP, no solo para utilizar de manera técnica herramientas tecnológicas, sino también a su integración didáctica para asegurar un aprendizaje significativo, así mismo como menciona Kuzniak et al. (2016a), incorporar la tecnología ayuda a desarrollar un trabajo matemático eficiente, ya que impulsa la génesis instrumental y semiótica, que son necesarias para la exploración, descubrimiento y validación experimental. En particular, la formación del profesorado debe poner atención en el diseño de tareas, su adaptación para contextos específicos y cómo la IA o la tecnología pueden apoyar este trabajo de preparación de la enseñanza.

Entre las limitaciones de la investigación, se considera que el uso exclusivo de ChatGPT no permite realizar comparaciones con otras IA 's, por ejemplo, otras IA, tales como Gemini, Claude y Grox, lo que limita el haber generado diversas estrategias. En un trabajo posterior, se podría considerar este asunto. Por otro lado, se muestran los análisis en torno a dos tareas, a futuro se podrían considerar más variedad de tareas, contextos, escenarios escolares; sin embargo, esta investigación puede ser ampliada en este sentido. Asimismo, una proyección para futuras investigaciones, considerar explorar el uso de IA en educación primaria, permitiendo que los estudiantes puedan activar a temprana edad el ETM personal mediante la integración de IA con tareas manipulativas y contextuales, potenciando con esto además, la génesis instrumental.

Referencias

- Almubarak, M., Maat, S. M. y Mahmud, M. S. (2025). Evolving three decades of geometry learning strategies: A combination of bibliometric analysis and systematic review. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 21(6), em2654. <https://doi.org/10.29333/ejmste/16515>
- Creswell, J. W. y Creswell, J. D. (2023). *Research design. Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (Sixth Edition). SAGE.
- Daher, W., y Anabousy, A. A. (2025). The didactical knowledge of generative artificial intelligence tools: The case of writing mathematics lessons. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 21(9), em2691. <https://doi.org/10.29333/ejmste/16769>
- Escotet, M. Á. (2024). The optimistic future of Artificial Intelligence in higher education. *Prospects*, 54(3), 531–540. <https://doi.org/10.1007/s11125-023-09642-z>
- Espinoza-Vásquez, G., Henríquez-Rivas, C., Climent, N., Ponce, R., y Verdugo-Hernández, P. (2025). Teaching Thales's theorem: Relations between suitable mathematical working spaces and specialised knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 118(2), 271–293. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10367-9>
- Gaona, J., Rodrigo Hernández, Felipe Guevara, & Víctor Bravo. (2022a). Influence of a Function's Coefficients and Feedback of the Mathematical Work When Reading a Graph

- in an Online Assessment System. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (IJET)*, 17(20), pp. 77–98. <https://doi.org/10.3991/ijet.v17i20.32641>
- Gaona, J., López, S. S., y Montoya-Delgadillo, E. (2022b). Prospective mathematics teachers learning complex numbers using technology. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(9), 2219–2248. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2133021>
- Geiger, V., Galbraith, P., Niss, M., y Delzoppo, C. (2022). Developing a task design and implementation framework for fostering mathematical modelling competencies. *Educational Studies in Mathematics*, 109(2), 313–336. <https://doi.org/10.1007/s10649>
- Gustafsson, P., y Ryve, A. (2022). Developing design principles and task types for classroom response system tasks in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(11), 3044–3065. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1931514>
- Göktepe Yıldız, S., y Göktepe Körpeoğlu, S. (2025). Trends and insights of AI in mathematics education: A bibliometric analysis. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 20(3), em0837. <https://doi.org/10.29333/iejme/16401>
- Henríquez-Rivas, C., y Montoya-Delgadillo, E.. (2016). El Trabajo Matemático de Profesores en el Tránsito de la Geometría Sintética a la Analítica en el Liceo. *Bolema: Boletim De Educação Matemática*, 30(54), 45–66. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a03>
- Henríquez-Rivas, C., Kuzniak, A., y Masselin, B. (2022). The idoine or suitable MWS as an essential transitional stage between personal and reference mathematical work. In A. Kuzniak et al. (Eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 121–146). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_6
- Henríquez-Rivas, C., Ponce, R., Carrillo-Yáñez, J., Climent Rodríguez, N., y Espinoza-Vásquez, G. (2021). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 39(2), 123–142. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3210>
- Henríquez-Rivas, C., Verdugo-Hernández, P., y Valenzuela-Barrera, Y. (2023). Mathematical work of students in technical-professional education in an interdisciplinary context. *Uniciencia*, 37(1), 457–480. <https://doi.org/10.15359/ru.37-1.25>
- Henríquez-Rivas, C. y Verdugo-Hernández, P. (2023). Diseño de tareas en la formación inicial docente de matemáticas que involucran las representaciones de una función. *Educación Matemática*, vol. 35, núm. 3, 178-208. <https://doi.org/10.24844/EM3503.06>
- Henríquez-Rivas, C., y Kuzniak, A. (2021). Profundización en el trabajo geométrico de futuros profesores en entornos tecnológicos y de lápiz y papel. *Bolema*, 35(71), 1550–1572. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a15>
- Herbst, P., Cheah, U. H., Richard, P. R. y Keith, J. (2018). *International perspectives on the teaching and learning of geometry in secondary schools. ICME-13 Monographs*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-77476-3>
- Hossein-Mohand, H., Hossein-Mohand, H., Albanese, V., y Olmos Gómez, M. D. C. (2025). AI in mathematics education: A bibliometric analysis of global trends and collaborations (2020-2024). *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 21(2), em2576. <https://doi.org/10.29333/ejmste/15915>
- Johnson, H. L., Coles, A., y Clarke, D. (2017). Mathematical tasks and the student: Navigating “tensions of intentions” between designers, teachers, and students. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0894-0>
- Johnson, H. L., y Ohtani, M. (2025). Advances in task design in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 57, 651–664. <https://doi.org/10.1007/s11858-025-01690-3>
- Jones, K., y Pepin, B. (2016). Research on mathematics teachers as partners in task design. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(2–3), 105–121. <https://doi.org/10.1007/s10857-016-9345-z>

- Kuzniak, A. (2022). *The Theory of Mathematical Working Spaces—Theoretical Characteristics*. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo y P. R. Richard (eds.), *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era* (vol. 18). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_1
- Kuzniak, A., Nechache, A., y Drouhard, J. P. (2016a). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education*, 48, 861–874. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0>
- Kuzniak, A., Philippe, R., y Richard, R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4), 5–15. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a>
- Kuzniak, A., Tanguay, D., y Elia, I. (2016b). Mathematical Working Spaces in schooling: An introduction. *ZDM Mathematics Education*, 48, 721–737. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>
- Kuzniak, A., y Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: A study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 271–289. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2>
- Lagrange, J. B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2011). Technology and mathematics education: A multidimensional study of the evolution of research and innovation. In *Second international handbook of mathematics education* (pp. 237-269). Dordrecht: Springer Netherlands.
- León Rodríguez, G. de la C., y Viña Brito, S. M. (2017). La inteligencia artificial en la educación superior: Oportunidades y amenazas. *INNOVA Research Journal*, 2(8.1), 412–422. <https://doi.org/10.33890/innova.v2.n8.1.2017.399>
- Markle, J., y McGarvey, L. M. (2025). Research on task design in pre-service mathematics teacher education: A scoping review. *Frontiers in Education*, 10, Article 1467482. <https://doi.org/10.3389/educ.2025.1467482>
- Menares Espinoza, R., Vivier, L. (2022). Personal Mathematical Work and Personal MWS. In: Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., Richard, P.R. (eds) *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era*, vol 18. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_5
- Ministerio de Educación en Chile. (Mineduc). (2015). *Bases Curriculares. 7º Básico a 2º Medio*. Autor.
- Mineduc. (2019). *Matemática 1º medio: Guía didáctica del docente* (Tomo 2, 4ª ed.). Santillana.
- Mineduc. (2020). *Matemática 1º medio: Texto del estudiante*. Santillana.
- Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A., & Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4 (I)), 181-197. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1749>
- Montoya-Delgadillo, E., Reyes Avendaño, C.G. (2022). The Reference Mathematical Working Space. In: Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., Richard, P.R. (eds) *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era*, vol 18. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_4
- Mustafa, M. Y., Tlili, A., Lampropoulos, G., Huang, R., Jandrić, P., Zhao, J., Salha, S., Xu, L., Panda, S., López-Pernas, S. y Saqr, M. (2024). A systematic review of literature reviews on artificial intelligence in education (AIED): A roadmap to a future research agenda. *Smart Learning Environments*, 11(1), 1–33. <https://doi.org/10.1186/s40561-024-00350-5>
- Opesemowo, O. A. G. y Adewuyi, H. O. (2024). A systematic review of artificial intelligence in mathematics education: The emergence of 4IR. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(7), em2478. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14762>
- Rebelo, E. M. (2025). Artificial Intelligence in higher education: Proposal for a transversal curricular unit. *Journal of Formative Design in Learning*, 1–24. <https://doi.org/10.1007/s41686-024-00097-9>
- Panqueban, D. y Huincahue, J. (2024) Artificial Intelligence in Mathematics Education: A Systematic Review. *UNICIENCIA* Vol. 38, N°. 1, pp. 1-17. <https://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.20>

- Saz-Pérez, F., & Pizà-Mir, B. (2024). Estudio exploratorio sobre usos y adaptaciones de las tareas escolares ante la irrupción de software de inteligencia artificial generativa. *Revista Estudios En Educación*, 7(12), 165-183. Recuperado a partir de <http://ojs.umc.cl/index.php/estudioseneducacion/article/view/360>
- Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica*. Ediciones Morata.
- Singh, A. K., Kiriti, M. K., Singh, H., y Shrivastava, A. (2025). Education AI: Exploring the impact of artificial intelligence on education in the digital age. *International Journal of System Assurance Engineering and Management*, 1–14. <https://doi.org/10.1007/s41686-024-00097-9>
- Son, T. (2024). Intelligent tutoring systems in mathematics education: A systematic literature review using the substitution, augmentation, modification, redefinition model. *Computers*, 13(10), Article 270. <https://doi.org/10.3390/computers13100270>
- Spreitzer, C., Straser, O., Zehetmeier, S., y Maaß, K. (2024). Mathematical modelling abilities of artificial intelligence tools: The case of ChatGPT. *Education Sciences*, 14(7), Article 698. <https://doi.org/10.3390/educsci14070698>
- Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.
- Sullivan, P., Bobis, J., Downton, A., Livy, S., Hughes, S., McCormick, M., y Russo, J. (2020). Ways that relentless consistency and task variation contribute to teacher and student mathematics learning. *For the Learning of Mathematics*, 32–37. <https://www.jstor.org/stable/27212034>
- Svičević, M., Milenković, A., Vučićević, N. y Stanković, M. (2025), Evaluating the Success of AI Tools in Supporting Student Performance in Mathematical Kangaroo Competition. *Computer Applications in Engineering Education*, 33:e70063. <https://doi.org/10.1002/cae.70063>
- Tan, Q. y Yuan, Z. (2024) A professional development course inviting changes in preservice mathematics teachers' integration of technology into teaching: the lens of instrumental orchestration. *Humanit Soc Sci Commun* 11, 934. <https://doi.org/10.1057/s41599-024-03408-4>
- Ticse, M., Salazar, J. V. F. y Vivas-Pachas, J. (2023). Trabajo matemático de estudiantes de secundaria en tareas sobre tasa de variación con el uso de GeoGebra. *PNA*, 17(4), 425-452. <https://doi.org/10.30827/pna.v17i4.24258>
- Wardat, Y., Tashtoush, M. A., AlAli, R., y Jarrah, A. M. (2023). ChatGPT: A revolutionary tool for teaching and learning mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(7), em2286. <https://doi.org/10.29333/ejmste/13272>
- Zhuang, Y., y Zhang, S. (2025). Pre-service mathematics teachers' perceptions of using GenAI for practicing teacher questioning: A semester-long study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 21(9), em2689. <https://doi.org/10.29333/ejmste/16764>

