CARACTERIZACIÓN DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN PROFESORES EN FORMACIÓN AL TRABAJAR CON FUNCIONES DISCRETAS* [1]

CHARACTERIZATION OF COVARIATIONAL REASONING IN TEACHERS IN TRAINING WHEN WORKING WITH DISCRETE FUNCTIONS

https://doi.org/10.32735/S2735-61752025000224013

Luis José Crúz Ramírez[2]
lcr810719@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9830-3004
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Puebla, México

Lizzet Morales García[3]
lizzet.morales@correo.buap.mx
https://orcid.org/0000-0002-2295-2278
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Puebla, México

RESUMEN

En esta investigación se caracterizó el razonamiento covariacional de 21 profesores de matemáticas en formación de Educación Secundaria, mediante una adaptación del constructo teórico del razonamiento covariacional para variables discretas. Utilizando una metodología de corte cualitativo con un enfoque exploratorio y descriptivo. Los datos recabados y analizados provienen de las producciones obtenidas al aplicar dos tareas contextualizadas que implicaron trabajar con funciones de variable discreta. El estudio permitió describir los niveles de razonamiento covariacional evidenciados, así como identificar consistencias entre la manera en que se justifica la consecución de la fórmula general al hacer uso del patrón reconocido, mostrando como hallazgo una coordinación con Cambio y Tendencia. Esta información puede servir para el diseño de actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento covariacional y funcional.

Palabras claves: Covariación; razonamiento; profesores en formación; variable discreta.

ABSTRACT

This research characterized the covariational reasoning of 21 preservice secondary school mathematics teachers through an adaptation of the theoretical construct of covariational reasoning for discrete variables. A qualitative methodology with an exploratory and descriptive

---

* Artículo recibido el 17 de octubre de 2025; aceptado el 9 de diciembre de 2025.
[1] El presente artículo forma parte de una investigación más amplia, vinculada al desarrollo de la tesis doctoral de uno de los autores.
[2] Maestro en Educación Matemática con experiencia en educación media superior y educación universitaria; Se encuentra en el último semestre del Doctorado en Educación Matemática en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.
[3] Doctora en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Profesora – investigadora de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México); sus líneas de investigación se enfocan en la formación de profesores, y el análisis de libros de texto de matemáticas.

approach was used. The data collected and analyzed come from the productions obtained by applying two contextualized tasks that involved working with discrete variable functions. The study allowed us to describe the levels of covariational reasoning evidenced, as well as to identify consistencies in the way in which the achievement of the general formula is justified when using the recognized pattern, revealing a finding of coordination with Change and Trend. This information can be used to design activities that promote the development of covariational and functional thinking.

Keywords: Covariation; reasoning; pre-service teachers; discrete variable.

Introducción

Desde hace varias décadas, la Educación Matemática busca desarrollar en los aprendices habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas. El pensamiento covariacional juega un papel fundamental en este proceso, ya que permite analizar y comprender relaciones complejas entre variables. El estudio de los fenómenos de variación y acumulación gestadores estupendamente de los conceptos asociados al de función, se presentan como posibles vías de soporte para una adecuada comprensión de este concepto. Dichos fenómenos de variación y acumulación no pueden ilustrarse afectados por las representaciones estáticas de los objetos matemáticos, sino que también deben estar asociados a un contexto.

En este sentido los elementos teóricos y conceptuales de covariación definen la perspectiva de esta investigación. Un elemento de gran relevancia en este estudio es el pensamiento funcional y su desarrollo desde la perspectiva de la generalización. Otro elemento fundamental es la covariación mediante procesos de generalización, vista como la relación que representa mayor dificultad para los estudiantes (Cañadas y Molina, 2016; Castillo-Garsow, 2017; Crúz, 2024; Weber, 2019), esta relación se basa en el estudio de cómo dos cantidades varían simultáneamente y cómo los cabios en los valores de una variable producen cambios en la otra. Esto implica que los estudiantes tienden a centrar la atención en los cambios de las variables de manera independiente.

Teniendo en cuenta que en el trabajo para el logro del desarrollo del pensamiento funcional intervienen tanto alumnos como profesores, Wilkie (2021) propuso un estudio con profesores de secundaria, donde analizaron la importancia del desarrollo funcional desde la perspectiva covariacional, combinándolo con el análisis del significado de la solución de ecuaciones cuadráticas y sus gráficos, donde reportaron que los participantes primeramente logran identificar e interpretar que las soluciones de dichas ecuaciones representan los ceros de las funciones que definen y los utilizan en algunos casos para encontrar la fórmula que define a la función en cuestión, destacando su importancia en procesos de generalización.

Antecedentes

Revisar las múltiples investigaciones que se han realizado en torno al álgebra es una labor muy interesante, como lo es también puntualizar y detenernos en algunos conceptos claves que de esta disciplina surgen, uno de ellos es el pensamiento funcional. En los últimos años diversos investigadores (Acuña, 2001; Crúz, 2024; Dolores, 2004; Martínez et al., 2018; Montero y Vargas, 2022; Prada et al., 2017; Stephens et al., 2017; Ureña et al., 2024; Wilkie, 2021; Yavuz, 2010) centraron su interés en la generalización desde un enfoque funcional del pensamiento algebraico, y la covariación.

Diversas investigaciones se han preocupado por estudiar el razonamiento covariacional en diferentes niveles de enseñanza (Barajas et al., 2018; Gruver, 2022; Martínez-Miraval y García-Rodríguez, 2022; Yemen-Karpuzcu et al., 2017) en todas se destaca la importancia del desarrollo del pensamiento covariacional como soporte del pensamiento funcional. De igual forma han sido varios los estudios que centran su foco de interés en el análisis del razonamiento covariacional en profesores de matemáticas en formación (Byerley, 2019; Crúz, 2024; Ellis et al., 2020; Weber y Greiner, 2019), en todos estos se busca que los profesores en formación desarrollen su pensamiento covariacional a través de la resolución de problemas y la reflexión. Exploran específicamente el desarrollo del pensamiento covariacional en profesores en formación a través de la resolución de problemas contextualizados y resaltan la importancia de identificar el tipo o tipos de variables inmersas en las situaciones que se analicen para dado el caso lograr procesos de generalización.

En este sentido Glen y Zazkis (2021) abordaron una investigación con estudiantes de secundaria, específicamente de colegios comunitarios en el oeste de los Estados Unidos, la cual se centró en las conexiones entre las funciones lineales y sus gráficos, en un curso de álgebra correctiva. En particular, describieron el trabajo de los estudiantes en una tarea diseñada con el fin de examinar la conexión entre los puntos de un gráfico y la ecuación lineal. Destacan que el análisis de dicha conexión jugó un papel fundamental a la hora de encontrar una fórmula general.

Por otra parte, González et. al (2015) reportan los hallazgos de una investigación en la que lograron analizar las dificultades de los estudiantes al hacer transformaciones entre registros de representación de una función, y el análisis del comportamiento de valores de una variable respecto a otra. Realizaron un estudio descriptivo de casos con un grupo de estudiantes de una institución educativa del sector rural colombiano. Estos autores concluyeron que los estudiantes presentaron dificultades serias con la identificación y uso de los elementos de la función, con la consecución del patrón de regularidad y de crecimiento, la elaboración de un modelo de la situación y en el uso del concepto de ecuación para encontrar una incógnita. Es por ello, que resaltan la importancia de continuar investigando sobre el tema.

En concordancia con lo anterior Bassok y Olseth (1995) comunicaron que existen problemas en los cuales los estudiantes pueden identificar el proceso de resolución clasificando a la variable como discretas, pero que otros estudiantes lo pudieran identificar como continuo, ejemplos los problemas que relacionan el dinero obtenido por una persona al realizar un trabajo en un número determinado de días, es decir el estudiante se puede centrar en la cantidad de dinero percibida por días hasta un número de días determinado, o puede fraccionarlo en cuánto le correspondería percibir por horas, por minutos o por segundos, es decir que para cada instante de tiempo corresponde una cantidad determinada de dinero, incluso enfatizan en que si el estudiante representa la situación con una línea recta lo estaría identificando como una relación donde percibe a las variables como continuas.

A pesar de que la mayoría de los problemas sobre los cuales se caracteriza el pensamiento covariacional versan en dominios continuos, no existe una clara distinción si la caracterización del pensamiento es discreto o continuo. Muy pocos investigadores, entre ellos Castillo-Garsow (2013) caracterizaron el razonamiento variacional desde la propia variación y lo describen en términos de variación continua suave o robusta y variación discreta, aunque no profundiza sobre la covariación discreta. Los autores describen la variación continua como robusta muy semejante a la variación discreta, pero en este caso el estudiante tiene una imagen tácita entre dos valores, algo similar ocurre con la covariación. También plantean que los estudiantes pueden concebir que el valor de una cantidad varíe discretamente o de manera continua.

Teniendo en cuenta todo lo anteriormente planteado y resaltando la importancia que tiene la concepción moderna del concepto de función afrontada por el pensamiento funcional, esta investigación tiene como objetivo caracterizar el razonamiento covariacional en profesores de matemáticas en formación de Educación Secundaria, con respecto a tareas que contienen funciones de variable discreta, mediante la propuesta de dos tareas contextualizadas. Cabe destacar que el estudio que aquí presentamos representa una parte de una investigación doctoral más amplia sobre el análisis del razonamiento covariacional de profesores en formación que consta de tres momentos o fases, donde las dos tareas que se analizan en este artículo forman parte de la primera fase, denominada fase diagnóstica.

Marco teórico

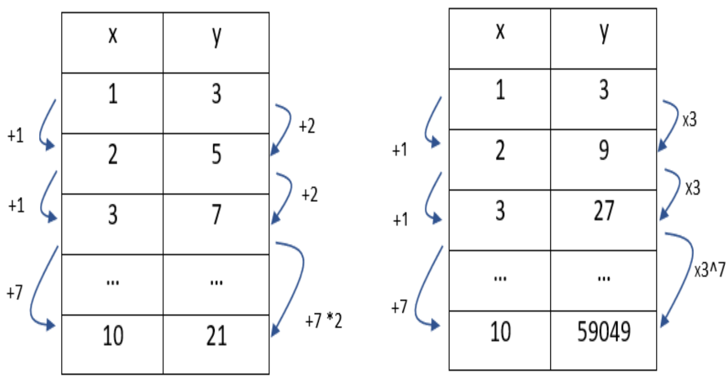
En esta sección, se presentan los elementos teóricos que dan soporte a la presente investigación. Primero se describen los elementos que la fundamentan y permiten explicar los resultados obtenidos. Luego, se realizaron adaptaciones acordes a la teoría de razonamiento covariacional de Thompson y Carlson (2017) tomando los dos primeros niveles de covariación para poder aplicarse de manera efectiva a funciones de variable discreta. Por último, se profundiza sobre la adaptación utilizada en Crúz (2024).

Conceptos relacionados al pensamiento covariacional

En cuanto a la covariación como alternativa para crear y conceptualizar relaciones funcionales Confrey y Smith (1995) consideraron dos enfoques: un enfoque de correspondencia y un enfoque de covariación. Ellos afirman que en el currículo prevalece el enfoque de correspondencia con la notación funcional $y = f(x)$, al determinar un único valor de y para algún valor de x dado. Mientras que el enfoque covariacional implica "poder moverse operacionalmente de y_m a y_{m+1} coordinando con los movimientos de x_m a x_{m+1}" (Confrey y Smith, 1995, p. 137), donde el empleo de tablas es importante, por lo que se deben coordinar dos o más columnas de valores a medida que se analizan de forma ascendente o descendente (Figura 1). Estos autores consideran que el enfoque covariacional de función, hace que el concepto de tasa de cambio sea al mismo tiempo más visual y crítico.

Figura 1

Covariación según Confrey y Smith (1995).

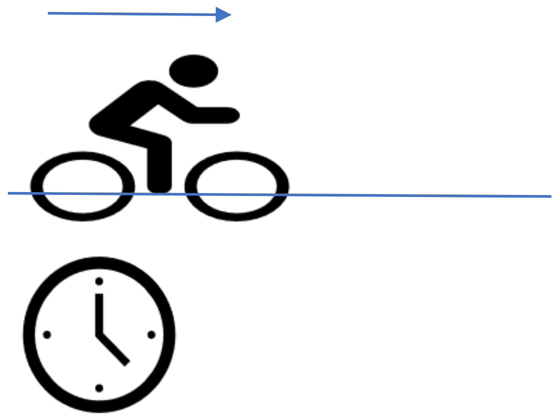


Fuente: Extraído de Thompson y Carlson (2017, p. 423)

Saldanha y Thompson (1998) detallan que la covariación se logra cuando el individuo "tiene en mente una imagen sostenida de los valores de dos magnitudes variando simultáneamente. Implica acoplar las dos magnitudes, de tal forma que, en la comprensión de uno, se forme un objeto multiplicativo de los dos" (p. 299). Por ejemplo, una persona puede imaginar como variables la distancia a la que está un atleta de un punto de referencia y el tiempo que se mide con un cronómetro, acoplar ambas variables de modo que los cambios ocurren simultáneamente es un rasgo del razonamiento covariacional (figura 2).

Figura 2

Covariación, según Saldanha y Thompson (1998)



Fuente: Creada por los autores

Thompson y Carlson (2017) argumentan que las ideas de variación y covariación continua son epistemológicamente necesarias para que los estudiantes y los profesores desarrollen concepciones útiles y robustas de las funciones. Presentan un recorrido histórico acerca de la evolución y desarrollo del concepto de función. De igual forma hacen una revisión en los marcos que fundamentan el razonamiento covariacional de dos maneras: a) a través del razonamiento variacional de los estudiantes por separado de su razonamiento covariacional, y b) atendiendo a la forma en que los estudiantes coordinan sus imágenes de las variaciones de los valores de las cantidades, teniendo en cuenta su forma de razonar de forma variable y teniendo en cuenta las maneras en que construyen objetos multiplicadores de los valores de las cantidades. En el presente artículo se mantiene la misma postura, pero haciendo énfasis en la covariación con variables discretas.

Covariación continua y discreta

Entender que una magnitud varía continuamente en un intervalo dado, supone considerar que dicha magnitud toma valores para cualquier valor que compone el intervalo. Es decir, existe covariación entre ambas (Thompson, 2011); sin embargo, la percepción de una cantidad que cambia continuamente se puede dar de dos formas: a trozos, cuando se pone énfasis a los extremos de los intervalos en los que se ha dividido un dominio determinado y suave, cuando se consideran todos los valores intermedios de dicho intervalo (Castillo-Garsow, 2010). Por otra parte, si una magnitud varía discretamente en un intervalo dado, entonces debemos considerar que dicha magnitud toma valores enteros para cualquier valor del subconjunto de los números enteros que componen el intervalo (Malaspina, 2007).

Adaptación de la Teoría de Razonamiento Covariacional para Variables Discretas

Como es sabido y reportado en la literatura, la teoría de razonamiento covariacional de Thompson y Carlson (2017) se centra en el razonamiento matemático y la comprensión de las relaciones entre dos variables continuas. Sin embargo, es posible adaptar algunos de los conceptos clave de esta teoría para funciones de variables discretas. A continuación, proporcionaremos una adaptación de la teoría de razonamiento covariacional de Thompson y Carlson (2017) para variables discretas propuesta por Crúz (2024), que continuaremos refinando lo largo de la presente investigación.

En este sentido nos basamos en los antecedentes de Thompson y Carlson (2017) donde se postula que los estudiantes, al comprender la relación entre dos variables continuas, utilizan razonamientos covariacionales para interpretar gráficos y entender cómo los cambios en una variable afectan a la otra. Este enfoque proporciona una base sólida para adaptar la teoría a las variables que toman valores discretos, a las que denominaremos variables discretas.

En el presente estudio se clasifican dos formas diferentes de pensar con relación al cambio: a) pensar sobre el cambio en trozos completos. Por ejemplo, pensar en lo que ocurre en una hora, luego en un minuto, luego en un segundo y así sucesivamente, se pudiera ejemplificar con la velocidad a al que se desplaza un automóvil si nos referimos a variables continuas; así mismo al hacer alusión a variables discretas se podría analizar el número de artículos que se pueden adquirir con x cantidad de dinero, con y o con z cantidad de dinero, b) pensar en el cambio como un cambio progresivo. Por ejemplo, el cambio de posición de un corredor en función del tiempo o en función de un punto de referencia, en lugar de pensar en el cambio de posición como un evento repentino, se considera como un proceso gradual y continuo respecto al tiempo o gradual y discreto respecto a puntos de referencia.

Haciendo énfasis en refutar juicios realizados al empleo del marco teórico de Thomson y Carlson (2017) para funciones de variable discreta. Nos basamos en lo plateado en el marco del 2002, específicamente nos centramos en las dos primeras acciones mentales asociadas a sus respectivos niveles de razonamiento, ejemplo en la acción mental asociada al nivel denominado: sin coordinación, se plantea que la persona realiza operaciones aritméticas para dar sentido a los valores mostrados, al interior de las indicaciones de dichas acciones mentales se da margen a que los valores que tome la variable sean discretos.

Por otra parte, en la acción mental asociada al nivel de razonamiento denominado: Pre-coordinación de valores se plantea que se establecen de forma asincrónica relaciones entre los valores de diversas magnitudes; así como la verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada para cualquieras que sean estos valores, y la localización de puntos. Reforzamos las ideas anteriores con el estudio realizado por Malaspina (2007) donde se fortalece la idea de que, si una magnitud varía discretamente en un intervalo dado, entonces debemos considerar que dicha magnitud toma valores enteros para cualquier valor del subconjunto de los números enteros que componen el intervalo.

A continuación, se muestra la descripción de los niveles de razonamiento covariacional para funciones de variable discreta, cada nivel se relaciona con las acciones que indican comportamientos asociados con cada nivel de razonamiento covariacional que los participantes ponen en juego cuando resuelven una actividad.

Tabla 1

Niveles de razonamiento covariacional para funciones de variable discreta

Nivel	***Descripción***
Cambio y Tendencia N6	En lugar de observar una tendencia continua en un gráfico, la persona observa cómo los valores discretos de una variable cambian en relación con los valores discretos de la otra. Examina cambios en los valores de ambas variables en puntos específicos, ya sea ubicando puntos en un sistema de coordenadas, formando y analizando conjuntos de pares ordenados, o trabajando con expresiones algebraicas. La persona visualiza ambas variables variando suave y progresivamente.

Identificación de Patrones N5	La persona identifica patrones en las relaciones entre los valores de ambas variables. Detecta cómo un cambio en una variable está relacionado con un cambio en la otra en puntos específicos del conjunto de datos, e imagina que ambas variables varían en trozos completos.
Coordinación de valores N4	La persona coordina los valores de una variable (x) con valores de otra variable (y) con la anticipación de crear una colección discreta de pares (x, y) concibiendo tanto la abscisa como a la ordenada en el contexto de variables discretas.
Predicción y Extrapolación N3	La persona puede aplicar su comprensión de la relación entre variables discretas para predecir el comportamiento de una variable cuando se le da un valor específico de la otra variable. Puede realizar predicciones basadas en datos discretos, concretamente cuando se hace referencia a extrapolar variables, es decir realiza estimaciones más allá de lo que es el intervalo utilizado en la observación inicial. La persona forma una imagen general de los valores de las cantidades que varían juntos, haciendo referencia a aumentos o disminuciones. La persona no imagina que los valores individuales de las cantidades vayan juntos.
Causalidad y Efecto N2	La persona visualiza los valores de dos variables que varían, pero de manera asincrónica: una variable cambia, luego la segunda variable cambia, luego la primera y así sucesivamente. También puede inferir relaciones de causalidad entre variables discretas al observar cómo un cambio en una variable puede causar un cambio en la otra en el contexto de datos discretos. La persona no anticipa crear pares de valores como objetos multiplicativos.
Sin relación y coordinación N1	La persona no tiene una imagen de las variables que varían juntas, se enfoca en la variación de una u otra variable sin coordinación de valores. La persona no logra establecer la relación entre el tipo de variable y el tipo de gráfico, es decir, no logran reconocer que no son adecuados todos los gráficos para un mismo tipo de variable, evidenciando una incorrecta clasificación de la variable considerando la naturaleza de los datos que brinda la contextualización de un fenómeno.

Fuente: Creada por los autores.

De esta manera podemos inferir positivamente, que la teoría de razonamiento covariacional de Thompson y Carlson (2017) puede adaptarse de manera efectiva para aplicarse a funciones de variables discretas. Al enfocarse en patrones, cambios, predicciones y causalidad en el contexto de variables discretas, los estudiantes pueden desarrollar una comprensión sólida de las relaciones entre estas variables. Esta adaptación es esencial para promover la competencia en el razonamiento matemático con variables discretas.

Metodología

La metodología empleada en el presente estudio está ubica en una perspectiva cualitativa. Denzin y Lincoln (2011) afirmaron que, en esta, el investigador intenta descifrar o dar sentido a los significados que los participantes desarrollan sobre un fenómeno, el interés de los investigadores se centra en el proceso por encima de los resultados o productos. Transforma el entorno en un conjunto de representaciones que incluyen entrevistas, grabaciones, conversaciones, fotografías entre otros. Se considera como entorno un lugar físico o virtual donde los estudiantes cuentan con herramientas entre ellas las tecnológicas, para resolver tareas, que en este estudio están relacionadas con funciones de variables discretas. La investigación es de tipo exploratorio y descriptivo, dado que en ella se busca una posible relación e incidencia del razonamiento covariacional durante los procesos de resolución de tareas que involucran las funciones antes mencionadas. Esta posible relación se identifica a partir de los comportamientos que exterioricen los estudiantes al resolver estas tareas, lo que la ratifica como una investigación cualitativa.

Participantes y contexto

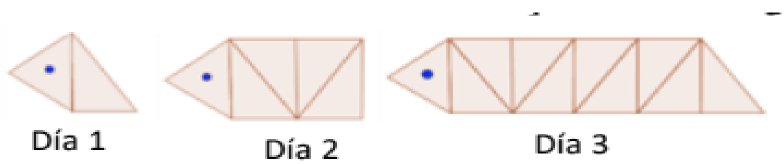
En el estudio participaron 21 profesores de matemáticas para secundaria en formación originarios de la Ciudad de Puebla, que estudian la licenciatura en una Universidad privada formadora de maestros de primaria y secundaria, de ellos 9 son mujeres y 12 hombres, sus edades están comprendidas entre los 19 y 21 años. Los datos fueron tomados al aplicar dos tareas contextualizadas provenientes de dos situaciones diferentes entre los meses de agosto y septiembre del año 2024. Se realizaron entrevistas semiestructuradas al finalizar cada actividad con el fin de corroborar el nivel de razonamiento covariacional identificado. Se tuvieron en cuenta los contenidos curriculares de matemáticas para profesores en formación relacionados con el pensamiento covariacional.

Estructura de las tareas

En la primera tarea del contexto hipotético, se realizó una adaptación de un problema propuesto en Blanton y Kaput (2011). Se procuró que cada pregunta tuviera una relación directa con uno o más nivel/es de razonamiento covariacional propuestos en la adaptación de la teoría de Thompson y Carlson (2017). Luego en la situación correspondiente a la segunda tarea, se tuvo en cuenta que para propiciar el razonamiento covariacional la situación debía estar enmarcadas en la variación y cambio, para ello se utilizó el análisis del movimiento de un automóvil con indicaciones de puntos de referencia, en los que mediante preguntas se solicitó a los participantes identificar variables para establecer regularidades, así como también cambios durante el movimiento.

Tarea 1
En el área de reptiles del zoológico: Africam Safari de la Ciudad de Puebla, están realizando un estudio sobre el crecimiento de una serpiente Pitón cada día. Para ayudarlos, se te pide encontrar el número de partes que tendrá una serpiente en crecimiento cada día. Debes tener en cuenta que cada triángulo equivale a una parte del cuerpo, y todas esas partes son iguales.

Figura 3
Tarea de la serpiente



Fuente: Adaptación de (Blanton y Kaput, 2011, p.11)

La tabla 2 muestra la alineación de cada actividad del diagnóstico con los elementos teóricos que permiten identificar los distintos tipos de razonamiento covariacional según las acciones mentales.

Tabla 2

Alineación de la tarea 1 y el Marco Teórico

Actividades	***Comportamientos esperados***
1.1) ¿Cuántas partes se tendrán en el día 4?	Se espera que el estudiante no tenga que mostrar una imagen de las variables que varían juntas, se enfoca en la variación del número de partes sin tener en cuenta el cambio en el número de días. Sin relación y coordinación N1.
1.2¿Cuántas partes se tendrán en el día 10, en el día 20 y el día 70?	Se espera que los participantes coordinen la cantidad del cambio del número de partes con los cambios en el número de días. Pueden visualizar los valores de estas dos variables que varían, pero de manera asincrónica. También pueden inferir relaciones de causalidad entre las variables discretas identificadas al observar cómo un cambio en una variable puede causar un cambio en la otra en el contexto de los datos discretos. Causalidad y Efecto N2.
1.3) Si tuvieras que explicar cómo hallaste el número de partes para el día 70. ¿Cómo lo harías?	Los participantes identifican patrones en las relaciones entre los valores de ambas variables. Detecta cómo un cambio en la variable número de días está relacionado con un cambio en el número de parte en puntos específicos del conjunto de datos, e imagina que ambas variables varían en trozos completos. Identificación de Patrones. N5.
1.4) ¿Qué día habrá 901 partes, y cuál tendría 962 partes de su crecimiento? Explique la relación entre los números de días encontrados y las partes de su crecimiento.	La persona coordina los valores de una variable (x) con valores de otra variable (y) con la anticipación de crear una colección discreta de pares (x, y) concibiendo tanto la abscisa como a la ordenada en el contexto de variables discretas. Coordinación de valores. N4.
1.5) ¿Cómo varía el número de partes de un día a otro?	Los participantes forman una imagen general de los valores de las cantidades que varían juntos, haciendo referencia a aumentos o disminuciones. La persona no imagina que los valores individuales de las cantidades vayan juntos. Predicción y Extrapolación N3.
1.6) Esboce una gráfica y encuentre una fórmula que modele la situación planteada.	En lugar de observar una tendencia continua en un gráfico, los participantes observan cómo los valores discretos de una variable cambian en relación con los valores discretos de la otra. Examina cambios en los valores de ambas variables en puntos específicos, ya sea ubicando puntos en un sistema de coordenadas, formando y analizando conjuntos de pares ordenados, o trabajando con expresiones algebraicas. La persona visualiza ambas variables variando suave y progresivamente. Cambio y Tendencia. N6.

2.4 ¿Es posible saber un número de la etiqueta de un poste cualquiera, si se conoce el número de poste? Explique y si su respuesta es afirmativa de algunos ejemplos.	La persona coordina los valores de una variable (x) con valores de otra variable (y) con la anticipación de crear una colección discreta de pares (x, y) concibiendo tanto la abscisa como a la ordenada en el contexto de variables discretas. Coordinación de valores. N4.
2.5 Represente en el plano cartesiano cómo se relacionan el número de etiqueta con el número de poste. Describa la relación representada en su gráfica.	En lugar de observar una tendencia continua en un gráfico, los participantes observan cómo los valores discretos de una variable cambian en relación con los valores discretos de la otra. Examina cambios en los valores de ambas variables en puntos específicos, ya sea ubicando puntos en un sistema de coordenadas, formando y analizando conjuntos de pares ordenados, o trabajando con expresiones algebraicas. La persona visualiza ambas variables variando suave y progresivamente. Cambio y Tendencia. N6.
2.6 Un corredor se encuentra a una distancia de 270 metros del primer poste. ¿Se puede ubicar la posición del corredor en la gráfica del inciso anterior? Explique.	Muestran la coordinación de los valores individuales de número de poste y valor de la etiqueta. Coordinación de valores. N4.
2.7 ¿Es posible determinar la distancia respecto del primer poste, en donde se encontraría un corredor, utilizando el número del poste o la etiqueta como información? Explique y si su respuesta es afirmativa, dé algunos ejemplos.	Los participantes observan cómo los valores discretos de una variable cambian en relación con los valores discretos de la otra. Examinan cambios en los valores de ambas variables en puntos específicos, utilizando una expresión algebraica, visualizan ambas variables variando suave y progresivamente. Cambio y Tendencia. N6.

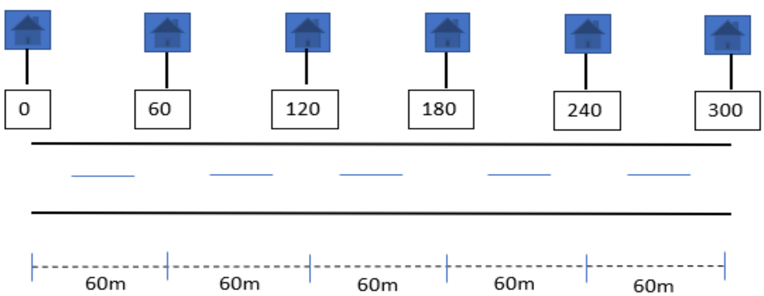
Fuente: Creada por los autores

Tarea 2

En la figura se muestra un tramo recto de una pista donde se efectúa una maratón, se ubican una serie de postes en un lateral de la carretera, donde cada uno de ellos lleva consigo una etiqueta en forma de casita, que indica la distancia a la que se encontraría un corredor respecto del primer poste. Dada la información, responda las siguientes preguntas:

Figura 4

Tarea de los postes



Señaléticas en la maratón. Adaptado de García et al. (2018)

La Tabla 3 muestra la alineación de las actividades de la tarea de los postes y los niveles de razonamiento covariacional correspondientes en concordancia con los comportamientos esperados.

Tabla 3
Alineación de la tarea 2 y el Marco Teórico

Actividades	***Comportamientos esperados***
2.1 ¿El número que aparecerá en la etiqueta del poste N°7 es menor que el número que aparecerá en la etiqueta del poste N°10? Explique.	Los participantes no muestran una imagen de las variables que varían juntas, se enfocan sólo en la variación del *número de la etiqueta* sin coordinar valores. Sin relación y coordinación. N1. También pueden visualizar los valores de las dos variables que varían, pero de manera asincrónica, o puede inferir relaciones de causalidad al observar cómo un cambio en una variable puede causar un cambio en la otra en el contexto de datos discretos. Causalidad y Efecto. N2.
2.2 ¿Cuál de las siguientes etiquetas sí es posible que aparezca en un poste: 480, 720 u 860? Explique.	Los participantes coordinan los valores de la variable número de poste (p) con valores de la variable (e) con la anticipación de crear una colección discreta de pares (p, e) concibiendo tanto la abscisa como a la ordenada en el contexto de variables discretas. Coordinación de valores. N4.
2.3 Un corredor se encuentra a 2868 metros del primer poste, ¿A qué distancia se encuentra del poste más cercano? Describa su procedimiento e indique el número del poste.	Los participantes identifican patrones en las relaciones entre los valores de ambas variables. Detectan cómo un cambio en una variable está relacionado con un cambio en la otra en puntos específicos del conjunto de datos, e imagina que ambas variables varían en trozos completos. Identificación de Patrones. N5.
2.4 ¿Es posible saber un número de la etiqueta de un poste cualquiera, si se conoce el número de poste? Explique y si su respuesta es afirmativa de algunos ejemplos.	La persona coordina los valores de una variable (x) con valores de otra variable (y) con la anticipación de crear una colección discreta de pares (x, y) concibiendo tanto la abscisa como a la ordenada en el contexto de variables discretas. Coordinación de valores. N4.
2.5 Represente en el plano cartesiano cómo se relacionan el número de etiqueta con el número de poste. Describa la relación representada en su gráfica.	En lugar de observar una tendencia continua en un gráfico, los participantes observan cómo los valores discretos de una variable cambian en relación con los valores discretos de la otra. Examina cambios en los valores de ambas variables en puntos específicos, ya sea ubicando puntos en un sistema de

	coordenadas, formando y analizando conjuntos de pares ordenados, o trabajando con expresiones algebraicas. La persona visualiza ambas variables variando suave y progresivamente. Cambio y Tendencia. N6.
2.6 Un corredor se encuentra a una distancia de 270 metros del primer poste. ¿Se puede ubicar la posición del corredor en la gráfica del inciso anterior? Explique.	Muestran la coordinación de los valores individuales de número de poste y valor de la etiqueta. Coordinación de valores. N4.
2.7 ¿Es posible determinar la distancia respecto del primer poste, en donde se encontraría un corredor, utilizando el número del poste o la etiqueta como información? Explique y si su respuesta es afirmativa, dé algunos ejemplos.	Los participantes observan cómo los valores discretos de una variable cambian en relación con los valores discretos de la otra. Examinan cambios en los valores de ambas variables en puntos específicos, utilizando una expresión algebraica, visualizan ambas variables variando suave y progresivamente. Cambio y Tendencia. N6.

Fuente: Creada por los autores

Datos

Los datos con los cuales contamos para esta investigación inicialmente fueron las respuestas que los participantes dieron a las dos tareas planteadas. Las producciones de los profesores en formación de manera individual nos permitieron clasificar su habilidad de razonar covariacionalmente al resolver actividades contextualizadas, que implican el trabajo con funciones de variables discreta, todo con el propósito de tener un panorama más amplio y profundo sobre cómo piensan covariacionalmente los profesores en formación participantes en el estudio.

Por otra parte, las preguntas no contestadas, y las contestadas incorrectamente, fueron objeto de un análisis aparte mediante entrevistas semiestructuradas, debido a que en el primer caso no habrá en las producciones datos que nos permitan hacer afirmaciones e interpretaciones, porque no responden alguna actividad, y en el segundo caso utilicen análisis erróneos basados en fenómeno/s identificados o no; pero eso nos permitirá plantear algunos supuestos que puedan ayudar a explicar ese fenómeno. El objetivo inicial de cada entrevista fue corroborar que las acciones realizadas por los equipos estén en concordancia con el nivel de razonamiento covariacional identificado, pero también tiene como objetivo secundario identificar si se realiza la transición de un nivel de razonamiento covariacional a un nivel más complejo.

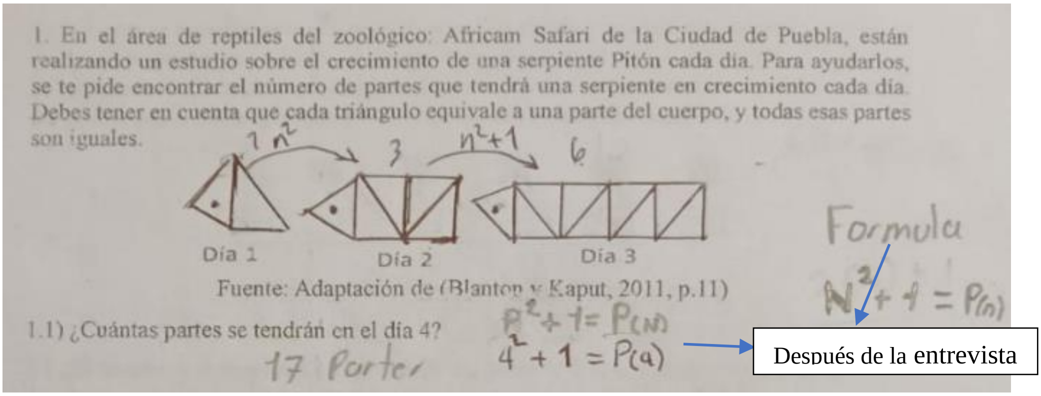
Análisis y resultados

Para analizar los procesos de resolución de las tareas, se utilizó la adaptación mostrada anteriormente del constructo teórico de Thompson y Carlson (2017). Las producciones se analizaron a partir de las descripciones de cada uno de los niveles de razonamiento covariacional. Estas descripciones sirvieron para identificar rasgos del razonamiento covariacional de los participantes al resolver las actividades propuestas para analizar las dos situaciones que dan origen a cada tarea

A continuación, en la Figura 5 se presenta la respuesta dada por el profesor en formación número uno respecto a la tarea 1, inciso 1.1). Destacamos que los profesores en formación fueron identificados como PF1, PF2, PF3, …, PF21.

Figura 5

Evidencia del PF1 en la solución del inciso 1.1



El profesor en formación inicialmente realiza un conteo del número de partes teniendo en cuenta los triángulos que muestra la figura dada, luego identifica qué si eleva al cuadrado el número de día y le suma la el triángulo del puntito le queda el número de partes, pero no es consciente de la fórmula que utiliza, ya que confunde la variable que debe expresar al cuadrado, por lo que aplica su comprensión de la relación entre variables discretas para predecir el comportamiento de una variable cuando conoce un valor específico de la otra variable, en este caso realiza una predicción basadas en datos discretos, concretamente cuando se hace referencia a extrapolar variables, es decir realiza estimaciones más allá de lo que es el intervalo utilizado en la observación inicial. Por lo que evidencia un N3. Predicción y Extrapolación.

A continuación, se muestra un extracto de la entrevista realizada, con el fin de corroborar el nivel de razonamiento covariacional identificado.

I: Para ti, ¿qué significa p y qué significa n?

PF1: p sería el número de partes y n el número de días

I: ¿Entonces para encontrar el número de días elevas al cuadrado el número de partes?

PF1: No, al revés, pongo al cuadrado el número de días y le sumo uno al resultado

I: ¿Puedes escribir correctamente la fórmula que utilizaste?

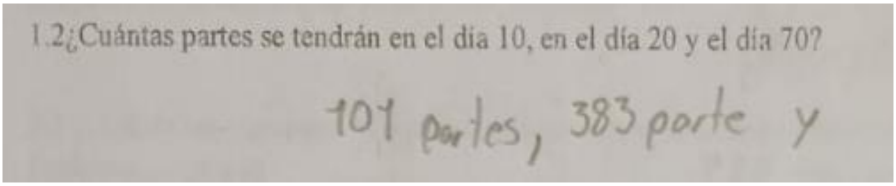
PF1: Si claro… ($n^2 + 1 = p_{(n)}$)

En esta parte de la entrevista, el PF1 evidencia claramente que identifica patrones en las relaciones entre los valores de ambas variables. Detecta cómo un cambio en una variable está relacionado con un cambio en la otra en puntos específicos del conjunto de datos, e imagina que ambas variables varían en trozos completos. Mostrando un N5. Identificación de Patrones. Por lo que hace una transición de un nivel inferior a uno superior, es decir del N3 al N5.

A continuación, se presenta la evidencia del PF1 en la resolución del inciso 1.2 correspondiente a la tarea 1.

Figura 6

Evidencia del PF1 en el inciso 1.2



A pesar de tener la fórmula general y haberla utilizado en la actividad anterior, el PF1 encuentra correctamente el número de partes para el día 10, pero el valor que propone para el número de partes correspondiente al día 20 es incorrecto y tampoco encuentra el número de partes correspondiente al día 70, por lo que visualiza los valores de dos variables que varían, pero de manera asincrónica. También se puede inferir relaciones de causalidad entre las variables discretas al observar cómo un cambio en la variable número de días puede causar un cambio en el número de partes en el contexto de datos discretos. En este caso el PF no anticipa crear pares de valores como objetos multiplicativos. Por lo que evidencia un N2. Causalidad y Efecto. Seguidamente se muestra un extracto de la entrevista realizada al PF1 relacionada con esta actividad.

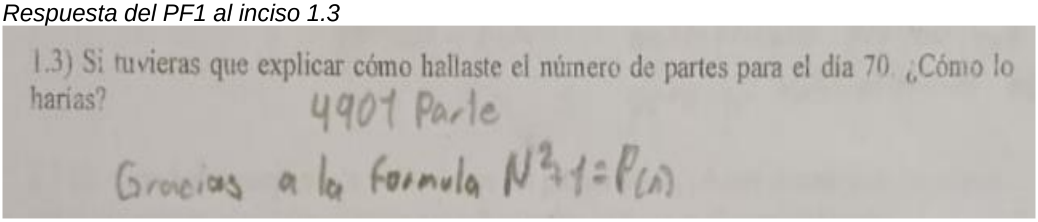
I: ¿Cómo encontraste el número de partes 383 para el día 20?
PF1: No profesor, ahí me equivoqué, sería 20 al cuadrado más 1 que da un total de 401 partes.
I: ¿Y crees que en algún momento el número de partes podría ser 383? (el PF1 se queda pensando y responde).
PF1: … Se supone que el crecimiento, aunque no se logre ver está presente siempre, es decir que en la mitad de un día la serpiente debe crecer la mitad de lo que crece en un día completo

En esta parte de la entrevista se puede observar que el PF1 hace la transición correctamente de lo discreto a lo continuo, y relacionado a los datos discretos al encontrar correctamente el número de partes para el día 20 y ya encontrado anteriormente el número de partes para el día 10, muestra que aplica su comprensión de la relación entre variables discretas para predecir el comportamiento de una variable cuando conoce el valor específico de la otra variable. Puede realizar predicciones basadas en datos discretos haciendo referencia a extrapolar variables, es decir realiza estimaciones más allá de lo que es el intervalo utilizado en la observación inicial. Evidenciando un N3. Predicción y Extrapolación.

Seguidamente se presenta la evidencia del PF1 respecto a la respuesta del inciso 1.3 correspondiente a la tarea 1.

Figura 7

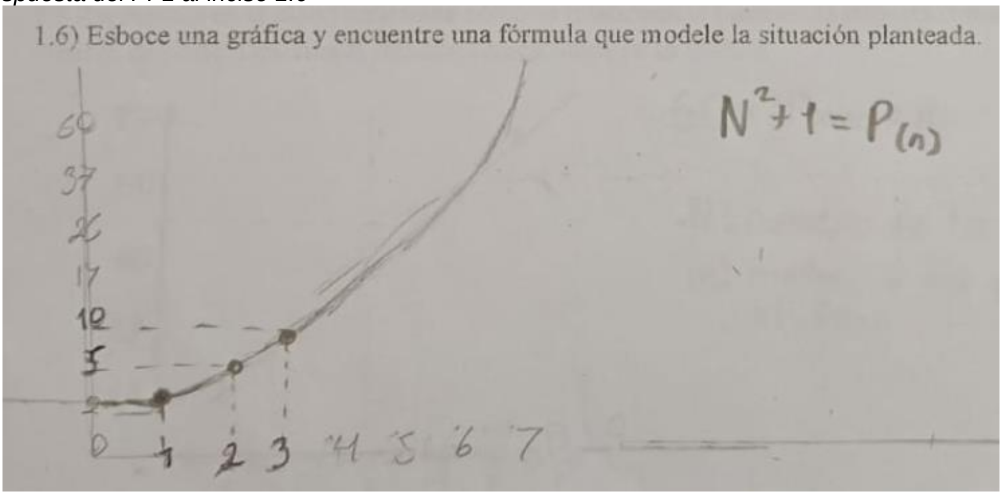
Respuesta del PF1 al inciso 1.3



En este caso el PF1 identifica y utiliza correctamente los patrones en las relaciones entre los valores de ambas variables. Detecta cómo un cambio en la variable número de días está relacionado con un cambio en la variable número de partes en puntos específicos del conjunto de datos, e imagina que ambas variables varían en trozos completos. Evidenciando un N5. Identificación de Patrones.

A continuación, se muestra la evidencia del PF1 respecto a la respuesta del inciso 1.6.

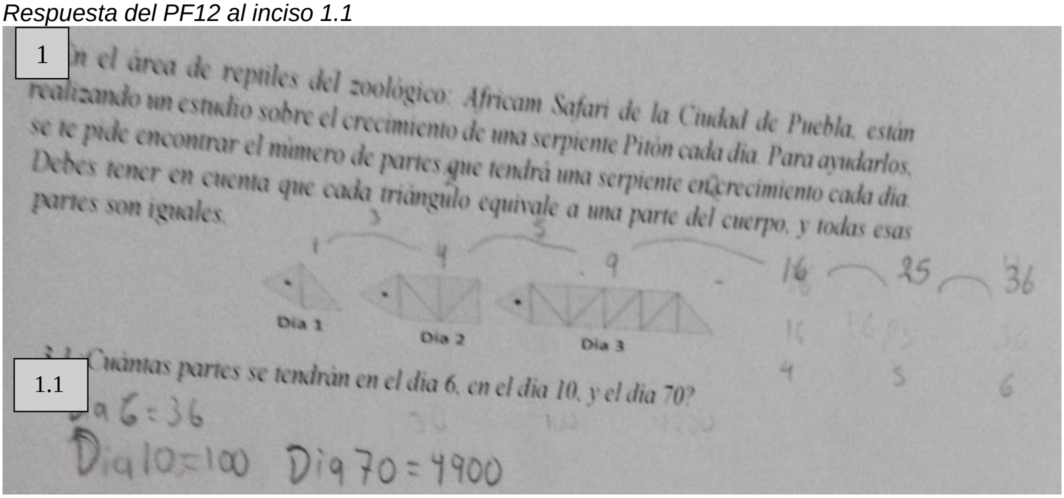
Figura 8
Respuesta del PF1 al inciso 1.6



En lugar de observar una tendencia continua en un gráfico (a pesar de hacer la curva completa deja claro los puntos de los valores discretos), el profesor observa cómo los valores discretos de una variable cambian en relación con los valores discretos de la otra. Examina cambios en los valores de ambas variables en puntos específicos, ubicando estos puntos en un sistema de coordenadas, formando y analizando conjuntos de pares ordenados, y utilizando la expresión algebraicas, visualiza ambas variables variando suave y progresivamente. Evidenciando un N6. Cambio y Tendencia.

A continuación, se muestran evidencias de las respuestas del PF12 respecto a la tarea 1. En la Figura 9 se presenta la respuesta dada por dicho profesor en formación al inciso 1.1).

Figura 9
Respuesta del PF12 al inciso 1.1



El PF12 en la actividad 1.1 realiza una sintetizada representación que le dificulta encontrar una fórmula general correcta y responde haciendo uso de la incorrecta representación que realizó, encontrando 36 partes para el día 6, 100 partes para el día 10 y 4900 para el día 70, evidentemente su análisis le indicó expresar al cuadrado el número de días, aunque encuentra valores incorrectos para la variable número de partes, se puede decir que identificó la coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra. Por lo que en este caso el PF12 realiza predicciones basadas en datos discretos, concretamente haciendo referencia a extrapolar variables, es decir realiza estimaciones más allá de lo que es el intervalo utilizado en la observación inicial, mostrando evidencias de Predicción y Extrapolación. N3.

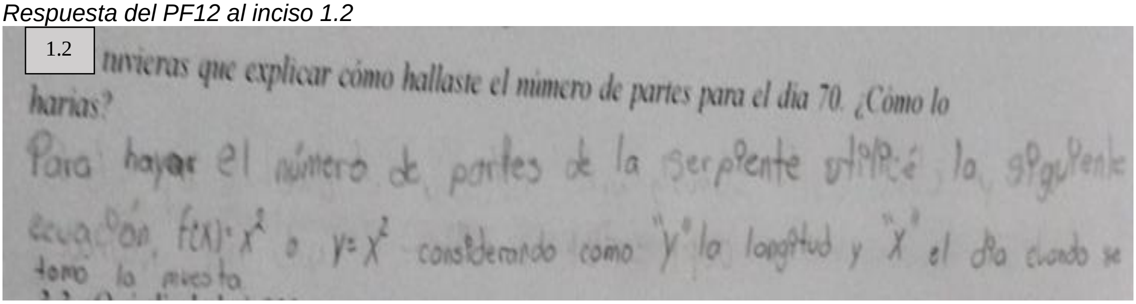
A continuación, se muestra un extracto de la entrevista realizada, con el fin de corroborar el nivel de razonamiento covariacional identificado.

I: ¿Qué observaste en la imagen que te hizo expresar el número de días al cuadrado para obtener el número de partes?
PF12: ¡Que del día uno al día 2 aumentó cuatro partes, eso es dos al cuadrado!
I: ¿Y del día dos al día tres cuántas partes aumentó?
14. PF12: ¡Aumentó cinco partes!
I: ¿Qué significado tienen para ti esas cinco partes?
PF12: ¡Que el día tres tiene la misma cantidad de partes que aumentó el día anterior, es decir cuatro, más las cinco partes de ese día y eso da 9 que sería tres al cuadrado!
I: Ahora observa la imagen detenidamente y responde, ¿cuántas partes tiene el día dos y el día tres?
PF12: ¡El día dos tiene cinco partes y el día tres tiene 10 partes!
I: Entonces, ¿crees que expresando al cuadrado el número de días puede encontrar el número de partes exacto?
PF1: ¡No profe!

En este caso se le orientó al PF12 que intentara encontrar los valores correctos para los días pedidos, y aunque en el proceso de reflexión mostrado en la entrevista parecía que era cuestión de observación para encontrar la fórmula general, este no la logró encontrar, por lo que ratificamos el nivel de razonamiento covariacional evidenciado antes de realizar la entrevista (N3).

Seguidamente se muestra la evidencia del PF12 con relación a las respuestas mostradas en la actividad 1.2 de la presente tarea.

Figura 10
Respuesta del PF12 al inciso 1.2


1.2 tuvieras que explicar cómo hallaste el número de partes para el día 70. ¿Cómo lo harías?

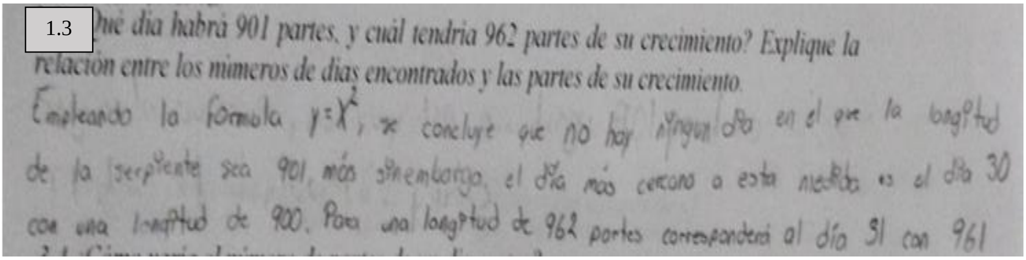
Para hayar el número de partes de la serpiente utilicé la siguiente ecuación $f(x)=x^2$ o $y=x^2$ considerando como "y" la longitud y "x" el día cuando se tomo la muesta

Como consecuencia de la errónea interpretación de la situación, el PF12 en en esta actividad encuentra incorrctamente un patrón que le indica plantear inadecuadamente la fórmula general en la que basa su análisis, pero si muestra que identifica la relación entre las variables *número de días* y *número de partes*, aunque no logra observar cómo los valores discretos de una variable cambian en relación con los valores discretos de la otra. Esto implica que no examina los cambios en los valores de ambas variables en puntos específicos, ya sea ubicando puntos en un sistema de coordenadas, formando conjuntos de pares ordenados, o trabajando con la expresión algebraica correcta. Pero muestra evidencias de que puede inferir relaciones de causalidad entre variables discretas al observar cómo un cambio en una variable puede causar un cambio en la otra en el contexto de datos discretos, sin crear pares de valores como objetos multiplicativos, mostrando evidencias de un N2. Causalidad y Efecto.

A continuación, se presenta la evidencia del PF12 con relación a las respuestas mostradas en la actividad 1.3 de la presente tarea.

Figura 11

Evidencia del PF12 en la tarea 1.3



1.3 ¿Qué día habrá 901 partes, y cuál tendría 962 partes de su crecimiento? Explique la relación entre los números de días encontrados y las partes de su crecimiento.

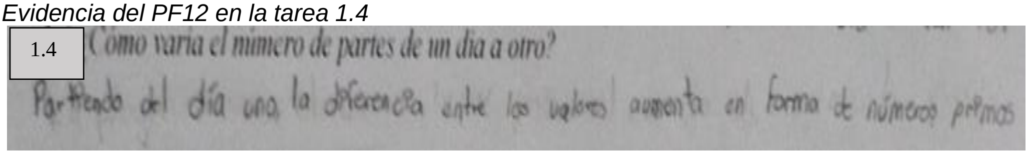
Empleando la fórmula $y=x^2$, se concluye que no hay ningún día en el que la longitud de la serpiente sea 901, más sin embargo, el día más cercano a esta medida es el día 30 con una longitud de 900. Para una longitud de 962 partes correspondería al día 31 con 961

En esta actividad se puede observar que el PF12 pudo inferir relaciones de causalidad entre las variables discretas al observar cómo un cambio en una variable pudo causar un cambio en la otra en el contexto de datos discretos, aunque encuentra valores incorrectos para una de las variables, esto debido al error que viene arrastrando de la incorrecta generalización realizada en actividades anteriores, evidenciando un N2. Causalidad y Efecto.

Seguidamente se presenta la evidencia del PF12 con relación a las respuestas mostradas en la actividad 1.4 de la presente tarea.

Figura 12

Evidencia del PF12 en la tarea 1.4



1.4 ¿Cómo varía el número de partes de un día a otro?

Partiendo del día uno la diferencia entre los valores aumenta en forma de números primos

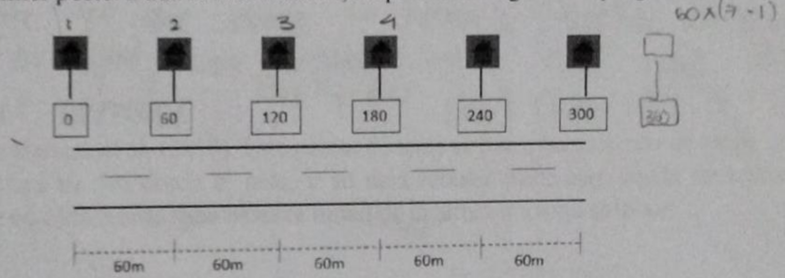
En esta actividad el PF12 se refiere de manera incorrecta al concepto de números primos, pero logra hacer referencia al cambio identificando aumentos, es decir que reconoce que a medida que aumentan los valores del número de días aumentan el número de partes, formando una imagen general de los valores de las cantidades que varían juntos, mostrando un N3. Predicción y Extrapolación.

Seguidamente se presentan evidencias de las respuestas del PF1 a las actividades de la tarea 2, en la Figura 13 se muestran evidencias del inciso 1.1

Figura 13

Evidencia del PF1 en la tarea 1.1

1. En la figura se muestra un tramo recto de una pista donde se efectúa una maratón, se ubican una serie de postes en un lateral de la carretera, donde cada uno de ellos lleva consigo una etiqueta en forma de casitas, que indica la distancia a la que se encontraría un corredor respecto del primer poste. Dada la información, responda las siguientes preguntas:



1.1 ¿El número que aparecerá en la etiqueta del poste N°7 es menor que el número que aparecerá en la etiqueta del poste N°10? Explique. Si . N7 = 360 y N10 = 540

En este caso podemos apreciar que el PF1 visualiza los valores de dos variables que varían, pero de manera asincrónica: una variable cambia, luego la segunda variable cambia, y así sucesivamente, no anticipa crear pares de valores como objetos multiplicativos, por lo que presenta un nivel de razonamiento *N2.* Pre-coordinación *de valores*. Siendo más específicos el profesor en formación observa cómo un cambio en una variable puede causar un cambio en la otra en el contexto de datos discretos. N2. Causalidad y Efecto. A continuación, en la Figura 14 se muestran evidencias del PF1 en el inciso 1.2

Figura 14

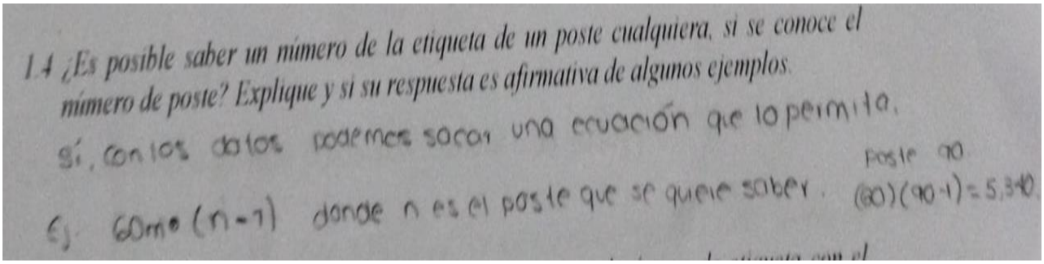
Evidencia del PF1 en la tarea 1.2

1.2 ¿Cuál de las siguientes etiquetas sí es posible que aparezca en un poste: 480, 720 u 860? Explique. 480 y 720. Porque son múltiplos de 60.

Acá se puede identificar que realiza operaciones matemáticas básicas, específicamente hace uso del concepto de múltiplo de un número para determinar el valor de una etiqueta o el número de poste; sin embargo, estas acciones se pudieran hacer solo de forma operativa, sin evidenciar una coordinación entre los valores de cada uno de ellos, por lo que presenta un nivel de razonamiento N1. Sin relación y coordinación. Tampoco tiene una imagen de las variables discretas que varían juntas, se enfoca en la variación de una u otra variable sin coordinación de valores. En la Figura 15 se presentan evidencias del PF1 en el inciso 1.4

Figura 15

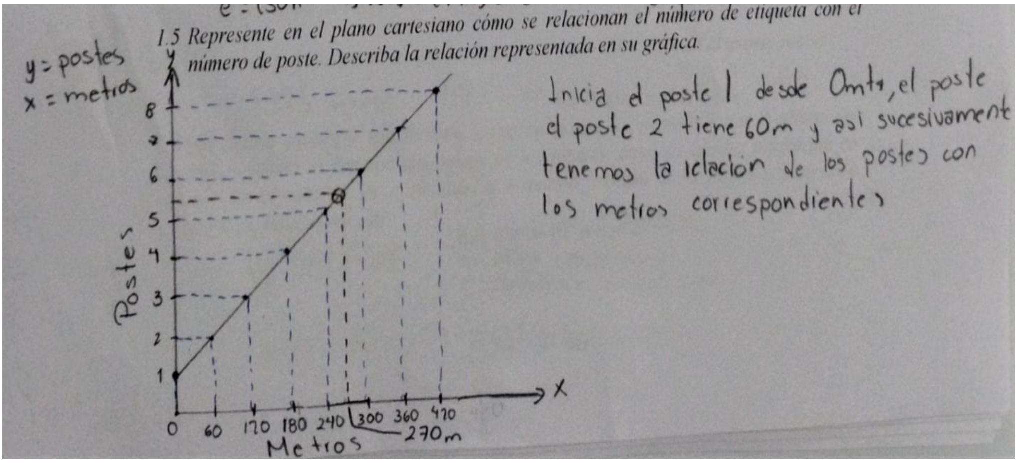
Evidencia del PF1 en la tarea 1.4



El PF identifica patrones en las relaciones entre los valores de ambas variables. Detecta cómo un cambio en la variable número de postes está relacionado con un cambio en la variable valor de la etiqueta en puntos específicos del conjunto de datos, e imagina que ambas variables varían en trozos completos. En la Figura 16 se presentan evidencias del PF1 en el inciso 1.5.

Figura 16

Evidencia del PF1 en el inciso 1.5



Representa en una gráfica la relación entre postes y etiquetas, aunque muy breve, pero describe la relación, escribe que en ambas partes (refiriéndose a número de postes y valor de la etiqueta) va en incremento, indicando que ese incremento es constante, por lo que podríamos decir que muestra coordinación de la cantidad del cambio de una variable con los cambios de la otra; al trazar la recta muestra evidencia de que observa una tendencia continua en el gráfico, pero al resaltar los puntos en la recta se puede decir que observa cómo los valores discretos de una variable cambian en relación con los valores discretos de la otra. Esto implicaba que examinara cambios en los valores de ambas variables en puntos específicos, por lo que alcanza el N6. Cambio y Tendencia.

Respecto a la actividad 2.6 donde se preguntaba que si un corredor se encuentra a 270 metros del primer poste, a qué distancia se encontraría del poste más cercano, y si se puede representar su ubicación en la gráfica anterior. El PF responde correctamente que se encontraría justamente en el medio del poste número 5 y número 6, y que si se puede representar en la gráfica realizada, incluso lo representa. Esto deja claro que en este caso el PF persona no tiene una imagen de las variables que varían juntas, se enfoca en la variación de una u otra variable sin coordinar los valores, es decir que no logra establecer la relación entre el tipo de variable y el tipo de gráfico, por lo que no logra reconocer que no son adecuados todos los gráficos para un mismo tipo de variable, evidenciando una incorrecta clasificación de la variable considerando la naturaleza de los datos que brinda la contextualización del fenómeno en cuestión, evidenciando un N1. Sin relación y coordinación.

A continuación, en la Tabla 4 se muestra un análisis de forma general de ambas tareas, el cual se describen los tipos de respuestas más comunes y los niveles de razonamiento covariacional asociados a las acciones realizadas que dan origen a estas respuestas.

Tabla 4

Análisis general de ambas tareas

Preguntas	***Tipo de respuestas***	***Nivel de razonamiento***
	Tarea 1	
1.1 ¿Cuántas partes se tendrán en el día 4 el día 6, en el día 10, y el día 70?	5 de los 21 participantes elaboraron una tabla indicando en las columnas (3 columnas) el número de días y en las filas las partes de crecimiento llegando a la respuesta correcta, 3 de ellos encuentran correctamente la fórmula general que permite hallar el número de partes escribiendo y sustituyendo en la fórmula respondiendo correctamente. el resto de los PF no encontraron resultados concluyentes.	El 10 de los participantes se centró en el cambio del valor de una sola variable, por lo que no identifican la coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra, estando asociado a un N1. 8 estuvieron asociados a un N2, es decir, no anticipan crear pares de valores como objetos multiplicativos. Por otra parte, 3 participantes mostraron un N3, pudieron realizar predicciones basadas en datos discretos, haciendo referencia a extrapolar variables.
1.2 Si tuvieras que explicar cómo hallaste el número de partes para el día 70. ¿Cómo lo harías?	6 de los 21 participantes responde que, haciendo uso de la fórmula general, otros 2 responden que hallando el patrón (expresión algebraica) con relación al transcurso de días. El resto explica mediante una tabla sin llegar a una respuesta concluyente.	9 participantes lograron establecer relaciones de causalidad entre las variables discretas. Pero no anticipan crear pares de valores como objetos multiplicativos (N2).
1.3 ¿Qué día habrá 901 partes, y cuál tendría 962 partes de su crecimiento? Explique la relación entre los números de días y las partes de su crecimiento.	8 de los 21 PF formularon una ecuación de segundo grado inferida de la fórmula planteada anteriormente despreciando el valor negativo, indicando que sería para el día 30 y el 32.	10 participantes pudieron realizar predicciones basadas en los datos discretos, haciendo referencia a extrapolar variables, realizando estimaciones más allá de lo que fue el intervalo utilizado en la observación inicial (N3). Y un participante logró alcanzar el N5.
1.4 ¿Cómo varía el número de partes de un día a otro? Argumenta	4 de los 21 PF indican que varía de forma creciente haciendo referencia a aumentos en ambas variables.	12 de los participantes expresan de forma verbal la coordinación de los cambios entre una magnitud y la otra, en término de aumentos (N3).
1.5 Esboce una gráfica que modele la situación	8 de los 21 participantes representa una parábola, de	4 de los participantes identificaron patrones en las relaciones entre los

planteada. Si un corredor se encuentra a una distancia de 270 metros del primer poste, diga si se puede representar en la gráfica anterior su ubicación.	ellos solo 4 desechan la rama del gráfico a la que corresponden valores negativos en el eje x. 4 PF representaron una línea recta y uno un gráfico de barras.	valores de ambas variables (N5). Tres participantes logran extender la idea de coordinación simultánea entre variables, imagina cambios en el valor de una variable como si ocurrieran simultáneamente (N6).
	Tarea 2	
2.1 ¿El número que aparecerá en la etiqueta del poste N°7 es menor que el número que aparecerá en la etiqueta del poste N°10? Explique.	8 de los 21 participantes responde de manera similar: *Sí porque la distancia aumenta a medida que aumenta el número de postes*. De los otros 12 participantes, 9 responden, haciendo referencia al concepto de múltiplo de un número, realizando operaciones aritméticas agregando el valor 60 al valor de las etiquetas, de ellos tres forman pares ordenados de la forma (7,360) y (10, 540).	10 de los 21 PF son conscientes de la relación que existe entre el número de poste y el valor de la etiqueta, pero solo 8 de ellos muestran un N2 de razonamiento. Luego 3 de los 21 expresaron características generales de cómo se relacionan los cambios entre las variables número de poste y valor de la etiqueta al señalar que el número de poste asciende y que cada vez que lo hace el valor de la etiqueta va aumentando 60 metros, por lo que muestran un N3, dos de los participantes aparecen sin coordinación.
2.2 ¿Cuál de las siguientes etiquetas sí es posible que aparezca en un poste: 480, 720 u 860? Explique.	10 de los 21 participantes respondieron que 480 y 720 porque son múltiplos de 60, dos respondieron que 480 y 720 porque para los 860 metros el corredor se encontraría entre dos postes indicando el número de estos postes (poste 14 y poste 15).	8 de los 21 participantes identifican posibles valores que pueden tomar las etiquetas, recurriendo a la noción de múltiplo de un número. Presentando comportamientos que se asocian a un N1 de razonamiento. Dos estudiantes, trabajan con el valor de una etiqueta hasta poder encontrar una relación entre ambas variables. Este comportamiento se asocia a un N2.
2.3 Un corredor se encuentra a 2868 metros del primer poste, ¿A qué distancia se encuentra del poste más cercano? Describa su procedimiento e indique el número del poste.	6 de los 21 participantes encuentran una fórmula general y la utilizan correctamente, respondiendo que se encuentra entre el poste 48 y 49, estando más cerca del poste número 49. 8 participantes utilizan la división del valor dado entre 60, e indican que el poste más cercano es el 48 debido al resultado de su división que es 47.8, pero no tienen en cuenta que deben sumar 1 de manera que represente al	De los 6 participantes que responden correctamente 3 de ellos trabajan con la fórmula: $60(n-1)$, igualan a 2868, despejan y encuentran el valor de n, dejándonos ver que coordinan los valores individuales de número de poste y valor de la etiqueta, encontrando una relación algebraica entre ellos, este comportamiento está asociado a un N4. El otro participante realizó un trabajo similar con la fórmula $y=60x-60$, indicando que

	primer poste.	x representa el número de postes, también presentan un N4.
2.4 ¿Es posible saber un número de la etiqueta de un poste cualquiera, si se conoce el número de poste? Explique y si su respuesta es afirmativa de algunos ejemplos.	6 de los participantes utilizan la fórmula general respondiendo afirmativamente, dos de ellos aparte de la fórmula construyen una tabla utilizando una columna para cada una de las etiquetas, denotándolas: $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$. Dos responden que si se puede justificando que solo se tiene que multiplicar por 60 el número de poste, pero no tienen en cuenta que para el poste número 1 el valor que aparece en la etiqueta es cero.	9 de los participantes muestra una coordinación de los valores individuales de número de poste y valor de la etiqueta. N4. Y un participante muestra un N5.
2.5 Represente en el plano cartesiano cómo se relaciona el número de etiqueta con el número de poste. Describa la relación representada en su gráfica.	18 participantes representan una recta en el sistema de coordenadas relacionando correcta o incorrectamente el número de poste con el valor de la etiqueta, de ellos solo 6 relacionaron correctamente, dos participantes hicieron un gráfico de barras.	Solo 6 participantes lograron examina cambios en los valores de ambas variables en puntos específicos, formando y analizando conjuntos de pares ordenados, o trabajando con una expresión algebraicas. visualizando ambas variables variando suave y progresivamente.

Fuente: Elaborada por los autores

Discusión

El presente estudio tuvo como objetivo, caracterizar el razonamiento covariacional en profesores de matemáticas en formación de Educación Secundaria, con respecto a tareas que implican trabajar con funciones de variable discreta mediante la propuesta de dos tareas contextualizadas. Al realizar la revisión de cada actividad contestada y clasificar a los profesores en formación participantes en el estudio en uno de los seis niveles de razonamiento covariacional señalados en la adaptación realizada para variables discretas, se detectaron ciertas consistencias en la forma en que se responde y justifica la selección de cada procedimiento o estrategia utilizada para resolver las actividades propuestas.

En niveles inferiores (Sin relación y coordinación), así como (Causalidad y Efecto) los futuros profesores, en el caso de la primera tarea inicialmente tienden a continuar trabajando en la figura de análisis dada tienden a centrarse en encontrar el patrón de variación, tal y como se plantea en la figura. Cuando comprenden que este método le llevará mucho tiempo deciden abandonarlo, ya que se hace más complicado continuar dibujando las serpientes hasta el día 70, que hallar características que permitan saber el número de partes de serpiente de una forma menos complicada, sin embargo, la mayoría de los participantes solo encuentra una parte del patrón, es decir establecen el número de días como patrón principal expresándolo al cuadrado y no consideran que la situación representa una variación entre dos variables, por lo que no muestran una idea general de Recurrencia. Desde el punto de vista de Pinto et al. (2016) la

Recurrencia que implica encontrar el patrón de variación y su consecución proporciona una alta probabilidad de logro a la hora de encontrar una fórmula general, situación por la cual se evidencia el fracaso en dicho cometido evidenciado por un gran número de los participantes en la presente investigación.

Por otra parte, en la segunda tarea un gran número de los PF recurre al concepto de múltiplo de un número coordinando de manera asincrónica valores individuales de ambas variables, ejemplo: Si conocen el valor de la etiqueta o el valor de la ubicación de un corredor, lo dividen entre 60, pero no se percatan que deben sumar 1 para hallar el número de poste. Se identificó que hacen uso excesivo del concepto antes mencionado, obstaculizando el logro de relacionar correctamente los cambios entre las variables número de poste y valor de la etiqueta, y menos señalar que el número de poste asciende, y que cada vez que lo hace el valor de la etiqueta va aumentando 60 metros.

Los profesores en formación presentaron dificultad a la hora de identificar que la variable número de postes es discreta, y no realizaron el análisis pertinente para responder si se podía representar o no la situación descrita. Según Ureña et al. (2024) quienes destacan el contraste entre la diversidad en las estrategias usadas y el bajo desempeño de los estudiantes a la hora de emplear estrategias adecuadas para generalizar o para expresar sus generalizaciones, a esto nos permitimos agregar por lo identificado en el presente estudio, que unos de los motivos principales por los cuales los participantes no alcanzan el logro en tal cometido, es que al hacer uso excesivo de operaciones aritméticas y el concepto de múltiplo de un número parecen limitar la identificación de la relación entre las variables.

Otro aspecto notable en las respuestas y procedimientos que muestran los profesores en formación que se encuentran en estos niveles de razonamiento covariacional, es que únicamente visualizan una de las dos variables inmersas en la situación y basan su elección en los cambios que presenta solo el número de postes o el número de días para el caso de la primera tarea, pero no analizan la dependencia de la primera variable respecto a la segunda. Luego al analizar los resultados de los participantes que alcanzan alguno de los niveles intermedios de razonamiento (Predicción y Extrapolación o Coordinación de valores), se encontró que identifican utilizando una tabla o un conjunto de pares ordenados de manera correcta la relación y dependencia entre las variables; sin embargo, muchos confunden el crecimiento cuadrático de la variable incorrecta y el tipo de gráfica según la clasificación de la variable.

En los niveles más avanzados (Identificación de Patrones y Cambio y Tendencia) la incorrecta interpretación gráfica fue el obstáculo principal a la hora de encontrar el elemento de recurrencia que facilita el trabajo a la hora de identificar un patrón y como consecuencia llegar a la fórmula general. Este tipo de obstáculo fue reportado por Ureña et al. (2024) en el contexto de la variación conjunta, al hacer mención de que las acciones asociadas a los niveles más avanzados son expresadas con cierto nivel de dificultad por parte de los estudiantes, debido a la manipulación de la representación y la posibilidad de verificación que la misma les proporciona, permitiéndoles resolver las dudas que sobre sus propias deducciones surgen. Inclusive la orientación que pueden significar las preguntas planteadas en la actividad no llega a ser detonantes suficientes para que estas acciones mentales se vean completamente reflejadas en los estudiantes.

Gráficamente los participantes se centraron en los conocimientos previos de representación de funciones para identificar los cambios en el crecimiento del número de partes en función de los días. Sería ideal se considere lo planteado por Mateus-Nieves y Moreno (2021); así como por Ramos (2021), que actualmente se observa en los estudiantes el surgimiento y desarrollo de argumentos variacionales partiendo de conocimientos previos que se relacionan con experiencias de la vida cotidiana, lo cual fue ampliado por Ellis et al. (216) y por Moreno y

Alvarado (2021), quienes afirman que uno de los problema más evidentes es que cuando los estudiantes inician en la enseñanza universitaria evidencian deficiencias significativas en el análisis y estudio de las funciones, lo que obstaculiza el logro a la hora modelar relaciones funcionales. Ejemplo de ello, es cuando los PF representan la situación de la primera tarea, al ser una expresión algebraica de define a una función cuadrática, estos no se percatan que la rama de la función donde le corresponden valores negativos en las abscisas no satisface al fenómeno simulado, es decir que no reconocen el dominio de la función analizada.

Conclusiones

El presente estudio nos permite destacar que, para desarrollar un problema que involucra funciones de variable discreta, no es suficiente razonar covariacionalmente en el nivel de coordinación de valores, también es imprescindible visualizar dos variables variando suave y progresivamente durante todo el preso o fenómeno analizado para reconocer cómo los participantes coordinan simultáneamente y observan el cambio en progreso con relación a los valores de dos variables en diferentes contextos, resaltando el contexto de físico. Este nivel de razonamiento covariacional y sus implicaciones podría estar relacionado con el rendimiento académico, la dificultad para interpretar problemas o la comprensión en temas de física y cálculo (Bojórquez et al., 2021), así como tareas contextualizadas en el ámbito económico. Esto representa que “a partir de situaciones particulares, los estudiantes hacen conjeturas, descubren relaciones y patrones que los conduce a realizar acciones para representar, organizar y reorganizar su conocimiento” (Mariño, 2021, p. 13). En este sentido, en la presente investigación jugó un papel primordial las entrevistas realizadas al finalizar cada tarea, ya que se basó en un proceso de análisis y reflexión por parte de los participantes, donde los pudieron manipular evaluar y analizar todas las variables inmersas en cada tarea, lo cual favoreció a la correcta interpretación, representación y análisis del fenómeno en cuestión.

Los participantes lograron analizar datos con variables discretas, para identificar patrones en las relaciones entre los valores de estas. Esto implicó que algunos de los participantes lograran detectar cómo un cambio en una variable está relacionado con un cambio en la otra en puntos específicos del conjunto de datos; Identificación de Patrones según (Crúz, 2024). En este caso particular, Ureña et al. (2024) indican que si el estudiante logra identificar correctamente patrones tendría el camino a encontrar una fórmula general prácticamente asegurado, en nuestro caso nos permitimos agregar que para lograr generalizar un proceso es importante primeramente lograr establecer la relación entre el tipo de variable y el tipo de gráfico, luego inferir relaciones de causalidad entre variables discretas, para entonces realizar una predicción o extrapolación y entonces llegar correctamente a identificar patrones que permitan encontrar una fórmula general. En el caso del PF1 comenzó identificando según la figura dada los valores que seguirían en la sucesión hasta darse cuenta de que para valores más lejanos necesitaba encontrar una fórmula general.

Uno de los aportes de la presente investigación es desde la perspectiva teórica, motivados por los resultados del presente estudio y recomendaciones propuestas en investigaciones como las de (Barajas et al., 2018; Crúz, 2024; Montero y Vargas, 2022; Trejo y Ferrari, 2018) donde se propone continuar abordando el análisis de fenómenos que involucren variables discretas. Teniendo en cuenta algunos de los conceptos claves de la teoría de razonamiento covariacional de Thompson y Carlson (2017), en la presente investigación se logró realizar y poner en práctica una adaptación de dicha teoría para funciones de variables discretas. La cual permitió que se lograra identificar las características mostradas en las producciones de cada participante y ubicarlo en uno de los seis niveles de razonamiento covariacional para variables continuas. El uso de esta adaptación en el estudio permitió identificar características muy interesantes en las producciones de los participantes, entre las que podemos mencionar la clara evidencia de algunos PF de una transición de lo discreto a lo continuo, un ejemplo claro de ello es el caso del PF1, al responder en la entrevista que para cada instante de tiempo debería existir una parte de crecimiento de la serpiente, es decir que ya estría ubicando la mirada en el horizonte de variables continuas. Esta información puede servir para el diseño de actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento covariacional y funcional; así como una herramienta para analizar el razonamiento covariacional de estudiantes cuando resuelven tareas contextualizadas que implican trabajar con funciones de variables discretas.

Referencias

Acuña, C. (2001). Conversión entre gráficas y ecuaciones a través de la descripción de semiplanos. *Educación Matemática, 13*(3), 75-92.

Barajas, C., Parada, S. E., y Molina, J. G. (2018). Análisis de dificultades surgidas al resolver problemas de variación. *Educación Matemática, 30*(3), 297-323. https://doi.org/10.24844/em3003.12

Bassok, M., & Olseth, K. L. (1995). Object-based representations: Transfer between cases of continuous and discrete models of change. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 21*(6), 1522–1538. https://doi.org/10.1037/0278-7393.21.6.1522

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., y Dougherty, B. J. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5.* Reston, VA: NCTM. *http://www.nctm.org/*

Bojórquez, K., González-Quiñones, F. y Tarango, J. (2021). Tipificación de patrones en razonamiento covariacional en estudiantes de nuevo ingreso en la carrera de ingeniería. *Revista de investigación educativa de la Rediech, 12*(1), 1-21. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v12i0.1173

Byerley, C. (2019). Calculus students' fraction and measure schemes and implications for teaching rate of change functions conceptually. *Journal of Mathematical Behavior, 55*(1), 1-17. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.03.001

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.*), Investigación en Educación Matemática*. Homenaje a Luis Rico (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Castillo-Garsow, C. (2010). *Teaching the Verhulst model: a teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth.* (Tesis de doctorado no publicada). Arizona State University.

Castillo-Garsow, C., Johnson, H., & Moore, K. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics, 33*(3), 31-37. https://www.researchgate.net/publication/269701624_Chunky_and_smooth_images_of_change

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation and their role in the development of exponential function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66-86. https://doi.org/10.2307/749228

Crúz, L. J. (2024). Análisis del razonamiento covariacional de profesores de matemática al trabajar con funciones de variable continua y discreta mediante el uso de GeoGebra. En. I. Cabero (Ed). *Perspectivas Contemporáneas en Educación: Innovación, Investigación y Transformación* (pp. 70- 94). Dykinson S.L.

Denzin, N. K., y Lincoln, Y. S. (2011). The SAGE Handbook of Qualitative Research. Thousand Oaks, CA: Sage.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 7*(3), 195-218.

Ellis, A., Ely, R., & Singleton, B. (2020). Scaling-continuous variation: supporting students' algebraic reasoning. *Educational Studies in Mathematics 104*(4), 87–103. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09951-6

Glen, L., y Rina, Z. (2021). On Linear Functions and Their Graphs: Refining the Cartesian Connection. *International Journal of Science and Mathematics Education, 19(1), 1485-1504.* https://doi.org/10.1007/s10763-020-10113-6

González, I., Zaldívar, J. D., y Morelos S. C. (2020). Dificultades en la construcción e interpretación de gráficas de funciones en estudiantes de nivel superior. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa, 33(1), 40-48.*

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *10*(3), 365-399.

Mariño, L. F., Falk de Losada, M. y Hernández, R. V. (2021). Una caracterización del pensamiento variacional desde la resolución de problemas de ecuaciones lineales diofánticas y la teoría fundamentada. *Eco Ma temático, 12*(1), 13-25. DOI:10.22463/17948231.3065

Martínez, M., Soberanes, A. y Sánchez, J. M. (2018). La importancia de la variación en el concepto de función: un caso de exploración mediante el uso de tecnología. *Programación Matemática y Software, 10*(2), 63-70.

Martínez-Miraval, M. A., y García-Cuéllar, D. J. (2022). Estudio de las Aprehensiones en el Registro Gráfico y Génesis Instrumental de la Integral Definida. *Formación Universitaria 13*(5), 177-190. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062020000500177

Mateus-Nieves, E. y Moreno Moreno, E. (2021). Desarrollo del pensamiento variacional para la enseñanza de nociones preliminares de cálculo: una experiencia de aula en la educación básica. *Acta Scientiae. (Canoas), 23*(2), 113-135. DOI:10.17648/acta.scientiae.5716

Montero, L. E., Vargas, V. (2022). Ciclos de modelación y razonamiento covariacional al realizar una actividad provocadora de modelos. *Educación Matemática, 34*(1), 214-248. https://doi.org/10.24844/em3401.08. https://doi.org/10.24844/em3401.08

Moreno Sandoval, S. y Alvarado Monroy, A. (2021). La modelización como vehículo para el desarrollo del razonamiento covariacional en educación secundaria. *Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática, 30*(2), 147-178. https://doi.org/10.48489/quadrante.23687

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). Málaga: SEIEM.

Prada, R., Hernández, C., y Ramírez, P. (2015). Comprensión del concepto de función en los primeros cursos de Educación Superior. *El cálculo y su Enseñanza, 6(1), 29-44.* https://doi.org/10.61174/recacym.v6i1.103

Ramos Flores, J. E. (2021). *Razonamiento covariacional de estudiantes de tercero de secundaria con respecto a funciones de variable continua y discreta* [Tesis de Maestría]. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Saldanha, L., & Thompson, P.W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative pers pective: Simultaneous continuous variation. En S.B. Berensen, K. R. Dawkins, M. Blanton, W. N. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood y L. Stiff (Eds.), Proceedings of the 20th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 1, pp. 298-303). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain & S. Belbase (eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education*. WISDOMe Mongraphs (Vol. 1, pp. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Thompson, P. W., y Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Trejo, M. y Ferrari, M. (2018). Desarrollo del razonamiento covariacional en estudiantes de nivel medio superior. El caso de la función exponencial. *Innovación e Investigación en Matemática Educativa, 3(1), 36- 58.*

Ureña, J., Beltrán-Meneu, M. J. y Ramírez, R. (2024). Rasgos de talento matemático en estudiantes de secundaria. Generalización en un contexto funcional. *PNA, 19*(1), 53-79. http://doi.org/10.30827/pna.v19i1.28279

Weber, K. E., & Greiner, F. (2019). Development of pre-service teachers' self-efficacybeliefs and attitudes towards inclusive educationthrough first teaching experiences. *Journal of Research in Special Educational Needs,19*(1), 73–84. https://doi.org/10.1111/1471-3802.12479

Wilkie, K. J. (2021). Seeing quadratics in a new light: secondary mathematics pre-service teachers' creation of figural growing patterns. *Educational Studies in Mathematics, 106*(1), 91–116.

Yavuz, Í. (2010). What does a graphical representation mean for students at the beginning of function teaching? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(4), 467-48.

Yemen-Karpuzcu, S., Ulusoy, F., y Isikșal-Bostan, M. (2017). Prospective Middle School Mathematics Teachers´ Covariational Reasoning for Interpreting Dinamic Events During Peer Interactions. *Int J of Sci and Math Educ, 15*(1), 89-108.

Zaldívar, J. (2017). Reflexiones en torno al uso de las gráficas en la enseñanza de las ciencias. *Tlahuizcalli, 3*(9), 13-24.